Grundlagen zum Goldenen Schnitt

Der Goldene Schnitt taucht zum ersten Mal im zweiten Buch der „Elemente“ des griechischen Mathematikers EUKLID (365-300 v. Chr.) auf. Dort liest man:

Eine gegebene Strecke so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.

Dies klingt sehr merkwürdig. Heute würde man wie folgt definieren:

Ein Punkt S teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Goldenen Schnitt, wenn sich die Gesamtstrecke zum größeren Teil so verhält wie die größere Teilstrecke zur kleineren.

A___________________S___________B

Eine alternative Definition ist:

Der Punkt S teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Goldenen Schnitt, falls gilt: $|AB|/|AS| = |AS|/|SB|$.

Die Länge der größeren Strecke $\overline{AS}$ wird **Major** genannt und mit M abgekürzt, die Länge der kürzeren Strecke $\overline{SB}$ wird entsprechend **Minor** genannt und mit m abgekürzt.

Wenn man die Länge der Gesamtstrecke mit a bezeichnet, dann gilt für den Goldenen Schnitt:

$a/M=M/m \quad \Leftrightarrow a\cdot m=M^2$.

Jetzt wird klar, dass die Lösung der von Euklid gestellten obigen Aufgabe die Konstruktion des Goldenen Schnittes ist.

Man kann nun weiterrechnen:

$a\cdot m=M^2$	(Definition des Goldenen Schnitts)
$\Leftrightarrow (M+m)\cdot m=M^2$	(Einsetzen von $a=M+m$)
$\Leftrightarrow (M+m)/m=M^2/m^2$	(Division durch m^2)
$\Leftrightarrow M/m+1=(M/m)^2$	(Umformen)
$\Leftrightarrow (M/m)^2-M/m-1=0$	(auf beiden Seiten $-M/m-1$).

Man nennt den Quotienten $M/m=\Phi$ (vom griechischen Bildhauer Phidias(460-430 v. Chr.), der oft den Goldenen Schnitt verwendete). Damit erhält man:

$\Phi^2 - \Phi - 1=0$.

Diese quadratische Gleichung ist sehr einfach z. B. mit der p-q-Formel zu lösen, und man erhält:

$\Phi=(1+\sqrt{5})/2\approx1{,}618$ (Die Lösung $(1-\sqrt{5})/2$ wird hier außer Acht gelassen, da ein negatives Streckenverhältnis keinen Sinn macht.) Φ wird auch als Goldener Schnitt oder als Goldene Zahl bezeichnet. Sie ist eine irrationale Zahl.