Materialien zum Unterricht, Sekundarstufe I, Heft 156

Standard-Mathematik von der Basis bis zur Spitze

Grundbildungsorientierte Aufgaben für den Mathematikunterricht

Autoren:

Christina Drüke-Noe
Dominik Leiß

Best.-Nr.: 03156

Hessisches Landesinstitut für Pädagogik, 2004

Drüke-Noe, Christina; Leiß, Dominik:
Standard-Mathematik von der Basis bis zur Spitze – Grundbildungsorientierte Aufgaben für den Mathematikunterricht/ Christina Drüke-Noe, Dominik Leiß. – 1. Aufl. – (Materialien zum Unterricht; Hrsg.: Hessisches Landesinstitut für Pädagogik, Frankfurt am Main, 2004, Sekundarstufe 1; 156)
ISBN 3-88327-516-6
NE: Drüke-Noe, Christina; HeLP; Hrsg.; GT

Herausgeber: Hessisches Landesinstitut für Pädagogik – Publikationsmanagement
Stuttgarter Straße 18 –24
60329 Frankfurt am Main
Fax: 069-38989-222

E-Mail: publikationen@afl.hessen.de

Diese Veröffentlichung wird im Auftrag des Hessischen Kultusministeriums (www.kultusministerium.hessen.de) herausgegeben; sie stellt jedoch keine verbindliche, amtliche Verlautbarung der Hessischen Kultusministerin dar; sie will vielmehr die Diskussion um die behandelten Themen anregen und zur Weiterentwicklung des hessischen Schulwesens beitragen.

Schriftliche Bestellungen sind zu richten an:

Amt für Lehrerbildung – Publikationsmanagement
Stuttgarter Straße 18 –24
60329 Frankfurt am Main
Fax: 069-38989-222
E-Mail: publikationen@afl.hessen.de
Homepage: http://www.help-zpm.de

Best.-Nr.: 03156

ISBN 3-88327-516-6
1. Auflage 2004

Titelgestaltung: Michaela Fetz/Manfred Chladek, Wiesbaden
aufgrund einer Vorlage von Dominik Leiß und Christina Drüke-Noe
Layout: Michaela Fetz, Wiesbaden
Druck- und Bindearbeiten: Druckerei des Hessischen Landesinstituts für Pädagogik, Fuldatal

Inhaltsverzeichnis

	Einleitung	5
Teil 1	**Theoretische Grundlagen**	7
	1.1 Klassifikation der Aufgaben	9
Teil 2	**Didaktischer Kommentar**	11
Teil 3	**Aufgabensammlung mit Lösungshinweisen**	14
Teil 4	**Anhang**	66
	Literaturhinweise	66
	Abbildungsnachweis	67
	AutorInnen	67

Einleitung

Die vorliegende Veröffentlichung ist der zweite Band der im Frühjahr 2003 im damaligen HeLP erschienenen „Grundbildungsorientierten Aufgaben für den Mathematikunterricht“. Sie greift die theoretischen Grundlagen auf, stellt weitere **Aufgaben** mit möglichen Lösungswegen und Lösungen sowie methodischen Anregungen vor.
Auch die in dieser Broschüre enthaltenen Aufgaben sollen einen Beitrag zur mathematischen Grundbildung leisten und damit einer zentralen Anforderung an Mathematikunterricht genügen. Aufgaben bilden den Kern unterrichtlichen Handelns im Mathematikunterricht, und mathematische Grundbildung kann durch die Wahl geeigneter Aufgaben, die mit geeigneten Methoden umgesetzt werden, gefördert werden. Darüber hinaus soll ein allgemein bildender Mathematikunterricht nach Winter (1995, S. 37) dreierlei Grunderfahrungen vermitteln:

1. „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen;
2. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen;
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben.“

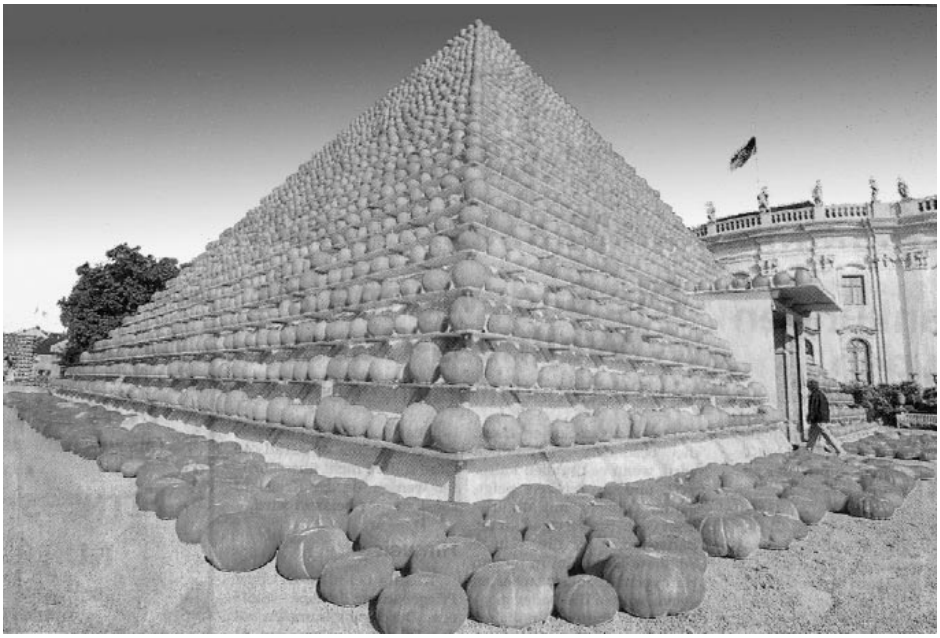
Um das traditionelle Unterrichtsskript deutscher Mathematikstunden sinnvoll variieren und das Potenzial vieler der vorgestellten Aufgaben besser ausschöpfen zu können, werden im Anschluss an jede in dieser Broschüre enthaltene Aufgabe stichwortartige Anregungen für geeignete Methoden zur unterrichtlichen Umsetzung gegeben. Ziel ist es, durch die aktive Auseinandersetzung mit den Fragestellungen eine Erweiterung der Problemlösekompetenz bei den Schülern zu erreichen.
Die entwickelten Aufgaben eignen sich in unterschiedlichem Maße für Haupt-, Real- und Gymnasialschüler und berücksichtigen die Jahrgangsstufen 5 bis 10 (siehe Klassifikationstabelle). Weitere Kriterien bei der Entwicklung der Aufgaben waren:

- verschiedene Lösungswege/ Lösungen sind möglich
- Herstellung inner- und außermathematischer Bezüge
- Unterschiedlicher Grad an Textintensität
- Unterschiedlich hohes Modellierungspotenzial
- Schüleraktivierung
- Förderung der Argumentationsfähigkeit
- Vernetzung mathematischer Inhalte

Um eine Einschätzung der Aufgaben und der zu ihrer Bearbeitung erforderlichen mathematischen Tätigkeiten zu ermöglichen, wird jede Teilaufgabe nach den Kompetenzklassen aus PISA (siehe Theoretische Grundlagen, S. 7ff) eingestuft. Die Zuordnung der einzelnen Teilaufgaben zu Kompetenzklassen, ihre Eignung ab der genannten Schulstufe sowie die Zuordnung zu den einzelnen Kompetenzklassen kann der Tabelle auf den Seiten 9/10 entnommen werden, ist aber als Orientierung zu verstehen und kann im Einzelfall durchaus anders eingeschätzt werden.
Da die gestellten Teilaufgaben als Anregung verstanden werden sollen, ist ihre Weiterentwicklung und Ergänzung denkbar und wünschenswert.
Die zur möglichen Umsetzung genannten Methoden werden hier nicht näher ausgeführt. Ihr organisatorischer Ablauf kann beispielsweise in Hugenschmidt (2002) nachgelesen werden.

Teil 1: Theoretische Grundlagen

Am Beispiel des Zeitungsartikels „Pyramide aus praller Frucht“ werden im Folgenden die Kompetenzklassen beschrieben und durch mögliche Fragestellungen exemplifiziert. Weitere Fragestellungen zu diesem Zeitungsartikel befinden sich im Aufgabenteil.



Pyramide aus praller Frucht

In kräftigen Farben leuchtet die angeblich größte Kürbispyramide der Welt mit einer Höhe von 15 Metern und einer Seitenlänge von 20 Metern vor dem Residenzschloss in Ludwigsburg. Die Pyramide ist Mittelpunkt der noch bis zum 3.November 2002 dauernden Ausstellung „Kleopatras geheimnisvolle Kürbiswelt“, die aus über 600 verschiedenen Kürbissorten gestaltet ist. (AP) Foto AP

Klasse 1A: Anwenden von Wissen und technischen Fertigkeiten
Eine Aufgabe gehört zur Kompetenzklasse 1A, wenn sie nur einfache technische Fertigkeiten und/oder den Abruf von Faktenwissen erfordert.

Beispiel:
Welche Form hat die Grundfläche der Pyramide?

Klasse 1B: Einschrittige Standardmodellierungen
Zu diesem Aufgabentyp gehören im Wesentlichen die so genannten „eingekleideten Aufgaben“. *„Zur Lösung der Aufgabe ist eine einzige Modellierung erforderlich. Diese ist jedoch unter Rückgriff auf einen einzigen Algorithmus, eine einzige Formel möglich. Es ist also die passende Formel, das passende Verfahren, die passende Prozedur aus dem vorhandenen Wissen auszuwählen und dann anzuwenden. Das zur Modellierung erforderliche Wissen stammt aus einem einzigen mathematischen Gebiet.“* (Neubrand et al. 2001, S. 52)

Beispiel:
Wie groß ist die Grundfläche der Pyramide?

Klasse 2A: Begriffliches Arbeiten

Aufgaben, die dieser Kompetenzklasse zugeordnet werden, erfordern kaum Rechnungen, sondern zielen auf eine Lösung auf begrifflicher Ebene ab. Sie stehen damit in besonderem Kontrast zur überwiegenden Kalkülorientierung des deutschen Mathematikunterrichts.
„Der zur Lösung erforderliche Schritt ist überwiegend begrifflicher Art. Die Lösung der Aufgabe kann durch Anwendung eines einzigen begrifflichen Arguments, durch Herstellung eines begrifflichen Zusammenhangs erfolgen. Dabei genügt es auch, den erforderlichen Begriff als Wissensbestandteil abzurufen." (Neubrand et al. 2001, S. 52)

Beispiel:

Welche Eigenschaften haben die Seitendreiecke der Pyramide?

Klasse 2B: Mehrschrittige Modellierungen

Die Aufgaben dieser Kompetenzklasse erfordern – wie in der Klasse 1B – rechnerische Modellierungsprozesse, allerdings mehrschrittiger Art.
„Die Struktur der Modellierung ist mehrschrittig, d.h. bei der Lösung der Aufgabe ist entweder Wissen aus mehreren mathematischen Zusammenhängen einzusetzen oder mehrfach gleiche Schritte sind vorzunehmen und zu kombinieren." (Neubrand et al. 2001, S. 53)
In dieser Definition wird deutlich, dass es Aufgaben auf mindestens zwei unterschiedlichen qualitativen Niveaus gibt, nämlich Aufgaben, die mehrschrittige Modellierungsprozesse repetitiver Art erfordern (der gleiche Schritt muss mehrmals hintereinander ausgeführt werden), oder solche integrativer Art (unterschiedliche Modelle müssen herangezogen werden).

Beispiel:

Wie lang ist eine Seitenkante der Pyramide?

Klasse 3: Strukturelle Verallgemeinerung und Reflexion

Die Aufgaben dieser Kompetenzklasse erfordern beispielsweise eine Einsicht in die allgemeine Struktur bestimmter mathematischer Sachverhalte.
„Die Aufgabe beinhaltet Schritte der Verallgemeinerung, des Entwerfens einer allgemeinen komplexen Strategie, der Reflexion über das verwendete mathematische Modell, die Präsentation eines subtilen mathematischen Arguments, etc..." (Neubrand et al. 2001, S. 54). Insbesondere das eigenständige Entwerfen eines mathematischen Modells gehört dazu.

Beispiel:

Auf der Spitze der Pyramide liegt ein Kürbis, in der ersten Schicht liegen vier Kürbisse, in der zweiten acht.
Stelle eine allgemeine Vorschrift zur Ermittlung der Anzahl der Kürbisse in einer beliebigen Schicht auf.
Schreibe ein Verfahren auf, mit dem man die Anzahl der Kürbisse in einer beliebigen Schicht bestimmen kann.

1.1 Klassifikation der Aufgaben

Titel der Aufgabe	Teilaufgabe	Kompetenzklasse	Einsatz ab Klasse	Schulform	Seite
Ägyptische Kürbisse	a)	1B	9	alle	14
	b)	2B	9	alle	
	c)	3	8	G	
	d)	2B	7	R, G	
	e)	2B	8	G	
Euro	a)	3	6	G	16
	b)	2B	7	G	
	c)	3	6	G	
Hohn und Sport		2B	6	R, G	18
4 Vieren		1B	5	alle	19
Weihnachtliche Rechnung	a)	1B	5	alle	20
	b)	1B	7	alle	
	c)	1B	5	R, G	
	d)	2B	7	alle	
	e)	2B	7	alle	
	f)	2B	7	alle	
00	a)	1B	5	alle	22
	b)	1B	5	alle	
	c)	2B	7	alle	
	d)	2B	7	alle	
	e)	1B	5	alle	
Gestreckte Strecke		2B	7	alle	24
Zur rechten Zeit		2B	5	alle	25
15 Euro-Schein		2B	9	R, G	26
Gewebeband	a)	1B	5	alle	27
	b)	1B	7	alle	
	c)	3	7	alle	
Kühles Nass	a)	1B	5	alle	29
	b)	1B	5	alle	
	c)	1B	7	alle	
	d)	2B	5	R, G	
	e)	3	8	R, G	
Komposter	a)	2B	(5), 8	alle	31
	b)	3	(5), 8	alle	
Erderwärmung	a)	3	6	alle	33
	b)	3	6	alle	
	c)	2A	7	R, G	
	d)	3	8	R, G	
Crash hour	a)	1A	5	alle	36
	b)	3	7	R, G	
Kneipensterben		2A	8	R, G	38

Ein (teurer?) Platz in der ersten Reihe	a)	2A	8	R, G	40
	b)	2A	8	R, G	
	c)	1A	7	alle	
In 1 Sekunde um die Welt		1B	7	R, G	42
100-Meter-Lauf	a)	1B	6	alle	44
	b)	3	8	R, G	
	c)	3	8	alle	
Wahrscheinlich unwahrscheinlich		3	8	G	47
Kerze	a)	1B	7	alle	48
	b)	2A	7	alle	
	c)	2A	7	R, G	
	d)	2A	7	R, G	
WasserMaxx		2B	7	alle	50
Buchdruck		3	7	R, G	52
Puzzle	a)	1B	5	R, G	53
	b)	2A	8	R, G	
	c)	2A	8	R, G	
	d)	2B	9	R, G	
Auf großem Fuß …		2B	7	alle	55
Ein Bett im Kornfeld		2B	9	R, G	57
Riesen-Fliegen		3	7	R, G	59
Isabell	a)	2B	8	alle	60
	b)	2A	8	alle	
Ein Licht ist aufgegangen	a)	2B	8	alle	62
	b)	3	8	alle	
Über den Wolken		2B	7	alle	64

Teil 2: Didaktischer Kommentar

Internationale Vergleichsstudien wie TIMSS und PISA haben gezeigt, dass deutsche Schüler relativ gut Rechenroutinen anwenden können und über Faktenwissen verfügen, aber Defizite im Bereich des mathematischen Verständnisses haben, wenn sie ein Problem identifizieren müssen, um dann Gelerntes darauf anzuwenden und selbstständig Lösungswege zu finden. Deutsche Schüler zeigten international unterdurchschnittliche Leistungen bei komplexen, realitätsbezogene und inhaltliche Vorstellungen erfordernde, d. h. kognitiv anspruchsvollen Aufgaben oder bei länger zurückliegenden Lerninhalten.
Für den Mathematikunterricht ergeben sich somit zwei Bereiche für eine Weiterentwicklung, zum einen die im Unterricht eingesetzten Aufgaben, zum anderen die unterrichtlichen Methoden, die sich mit situationsadäquatem Lehrerverhalten ergänzen. Darauf soll im Folgenden näher eingegangen werden.
Ein Grund für Schwierigkeiten deutscher Schüler insbesondere im Umgang mit anspruchsvollen, Verständnis erfordernden Aufgaben scheint der oftmals vorherrschende Methodenmonismus zu sein, da das im deutschen Mathematikunterricht dominante, fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch oft schematisch verläuft, beim Lösen von Aufgaben durch eine Hinführung auf eine einzige richtige Lösung gekennzeichnet ist und vielen Schülern über weite Strecken geistige Passivität gestattet.
Im Zuge einer Verbesserung der Unterrichtsqualität sollen die Schüler zunehmend flexibel und selbstständig mit anspruchsvollen Aufgaben umgehen. Dabei soll das traditionelle Unterrichtsskript des deutschen Mathematikunterrichts mit den Phasen

1. Besprechung der Hausaufgaben
2. Kurze Wiederholungsphase bei zügigem Interaktionstempo
3. Neuer Stoff: fragend-entwickelndes Unterrichtsgespräch, das auf eine Lösung hinführt
   oder
   Bekanntes Thema: Bearbeitung einer Aufgabe an der Tafel durch einen Schüler mit Unterstützung des Lehrers und der Klasse
4. Lösung ähnlicher Aufgaben in Stillarbeit zur Einübung des Verfahrens
5. Vergabe und Erläuterung der Hausaufgaben,

bei dem primär die Lehrer die Agierenden sind (vgl. BLK-Gutachten, S. 74f.), durch veränderte, in größerem Maße schüleraktivierende Methoden sinnvoll ergänzt werden. Diese versetzen die Schüler in die Rolle der Agierenden, so dass sie Mathematik nicht mehr passiv als abgeschlossene Wissenschaft erleben, sondern lernen können, selbstständig vernetzend zu denken und über eigene Vorgehensweisen zu reflektieren. Zur Weiterentwicklung metakognitiver Fähigkeiten von Schülern ist ein „Durcharbeiten fachlicher Inhalte einschließlich des methodischen und abstrahierenden Herauslösens relevanter begrifflich-schematischer und prozesshaft-strategischer Merkmale" (Reusser, 1998) nötig. Insofern gehören reflektierende Phasen integral zum Bearbeitungsprozess. Aufgabe des Lehrers ist es, diese zu stimulieren.
Ein weiterer Grund für die Defizite deutscher Schüler scheint die Qualität der im Unterricht verwendeten Aufgaben zu sein. Veränderte Aufgaben wie die in dieser Broschüre enthaltenen können einen Beitrag zur Qualitätsentwicklung des Unterrichts leisten, da sie zumeist mehrere Lösungswege nahe legen und den Schülern in besonderem Maße ermöglichen u. a. zu experimentieren, heuristische Strategien anzuwenden, Vermutungen aufzustellen, diese begründet zu verifizieren oder zu falsifizieren und Probleme zu modellieren, zu deren Bearbeitung sie Gelerntes anwenden müssen und Regeln oder Zusammenhänge entdecken

können. Dazu müssen sie natürlich über Basiswissen verfügen, und Fertigkeiten sind als grundlegendes Handwerkszeug unerlässlich. Daran wird deutlich, dass veränderte Aufgaben traditionelle Aufgaben nicht ersetzen, sondern geeignet ergänzen sollen.
Qualitätskriterien für gute Unterrichtspraxis lassen sich zum einen über solche geeigneten Aufgaben, zum anderen durch den Einsatz geeigneter Methoden, ergänzt durch geeignetes Lehrerverhalten, realisieren und verknüpfen daher beide Aspekte notwendigerweise. Aufgaben bilden den zentralen Kern des Mathematikunterrichts, und diese Broschüre enthält zwar auch Wissen und Fertigkeiten betreffende Aufgaben, vor allem aber solche, die weiteren Qualitätsmerkmalen (vgl. Biermann/Blum/Wiegand) genügen, wie beispielsweise:

- Entwicklung adäquater Grundvorstellungen,
- Förderung von Modellierungsfähigkeiten und Fähigkeiten zum Problemlösen bei inner- und außermathematischen Anwendungen,
- Förderung der Fähigkeiten zum Argumentieren, zum Begründen und zum Verallgemeinern,
- Aufgreifen zurückliegender Inhalte und vielfältige Vernetzungen (horizontal und vertikal),
- Förderung von Textverstehen und -produzieren,
- Differenzierung und individuelle Förderungen innerhalb der Lerngruppe.

Diese und weitere Qualitätskriterien für Aufgaben sind entscheidend für qualitätsvollen Unterricht und können sich durch geeignete methodische Arrangements realisieren lassen, die erst erlauben, das volle Potenzial veränderter Aufgaben auszuschöpfen. Der Einsatz kooperativer Arbeitsformen, wie beispielsweise Partnerarbeit, Kugellager, wachsende Gruppe (ggf. mit anschließender Präsentation) fördert die Kommunikation zwischen den Schülern und kann daher möglichst viele Schüler zu anspruchsvollen geistigen Aktivitäten anregen, während die Interaktion nur zu einem geringen Teil über den Lehrer erfolgt.
Die Wahl der Methode hängt u. a. davon ab, ob die Aufgaben zur Erarbeitung, für einen explorativen Einstieg, zum Üben oder zum Sichern von Basiswissen eingesetzt werden sollen.

Ein Unterrichtsbeispiel

Am Beispiel der Aufgabe „15€-Schein“ aus dieser Broschüre werden einige ihrer Qualitätscharakteristika exemplifiziert, ein mögliches verändertes Unterrichtsskript konkretisiert und die Unterrichtsstunde im Hinblick auf ihre Qualitätsmerkmale analysiert. Zunächst wird hier allen Schülern die Aufgabenstellung, z. B. am Overheadprojektor präsentiert. In der anschließenden Einzelarbeitsphase kann jeder Schüler individuell erste Ideen für Lösungsansätze generieren und ggf. festzustellen, welche weiteren Informationen zur Bearbeitung der Fragestellung erforderlich sind. In der folgenden Partnerarbeitsphase können erste Lösungsansätze kurz ausgetauscht und gegenseitig begründet sowie Fragen geklärt werden. Während der Gruppenarbeitsphase ergänzen die Gruppenmitglieder gegenseitig ihre Lösungsansätze und können einen oder mehrere Lösungswege ausführen. Die Darstellung aller Gruppenarbeitsergebnisse erfolgt in der Präsentationsphase. Die Stunde endet mit einer Reflexion über angewendete heuristische Strategien, mathematische Grundlagen und Vorgehensweisen.
Was unterscheidet diese Unterrichtsstunde mit dieser Aufgabe von einer traditionellen Unterrichtsstunde?
Die Schüler können am Beispiel der „15€-Schein“-Aufgabe adäquate Grundvorstellungen entwickeln und miteinander überlegen, wie sich die Veränderung einer Größe (hier: die Länge eines Geldscheins) auf eine andere (hier: die Breite des Geldscheins) auswirkt. Zudem kann mit dieser Aufgabe ein Beitrag zur Förderung der Modellierungsfähigkeiten geleistet werden, da die Schüler zunächst ein mathematisches Modell aufstellen müssen, mit Hilfe

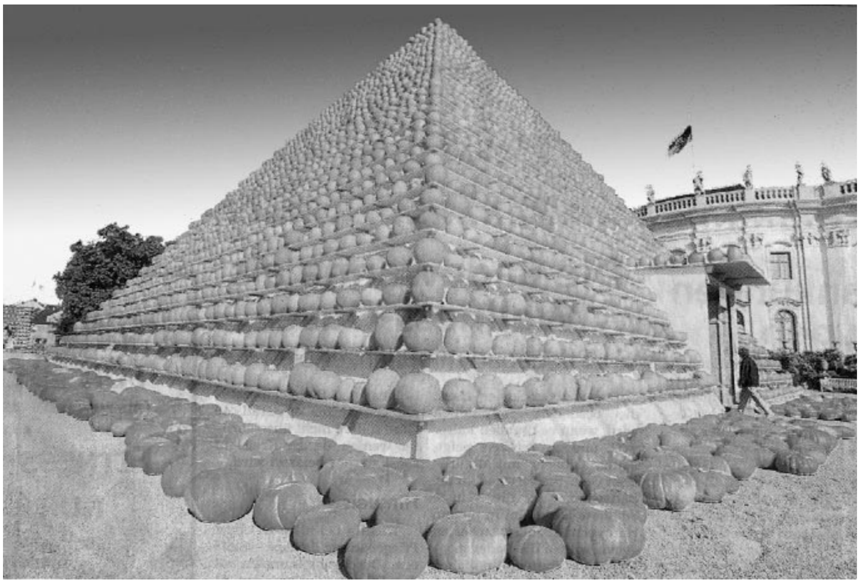
dessen sie die möglichen Maße eines 15€-Scheins entwickeln. Neben weiteren Lösungsansätzen ist denkbar, dass man lediglich zwischen den Maßen eines 10€- und eines 20€-Scheines interpoliert, von einem 50€- und einem 20€-Schein ausgehend extrapoliert, alternativ die Flächeninhalte der Geldscheine als Grundlage nimmt etc., wobei zeichnerisch oder rechnerisch Lösungen gefunden werden können. Die verschiedenen Ansätze legen einen Vergleich der gewonnenen Ergebnisse nahe und veranlassen in natürlicher Weise zur Reflexion über das jeweils zugrunde gelegte mathematische Modell. Die Gegenüberstellung der verschiedenen Lösungswege mit den geringfügig variierenden Ergebnissen eröffnet insbesondere während der Partner- und der Gruppenarbeitsphase, aber auch während der Präsentationsphase *allen* Schülern Gelegenheit zum Argumentieren und Begründen. Bereits die anfängliche Einzelarbeitsphase kann ein erhöhtes Maß an Schüleraktivierung begünstigen, da kein Schüler geistig passiv bleiben kann und spätestens anschließend im Austausch mit anderen zu ersten Lösungsansätzen gelangt. Die Aufgabe „15€-Schein" bietet überdies Potenzial zur vertikalen und horizontalen Vernetzung von Themengebieten, beispielsweise Strahlensätze, Pythagoras, Flächeninhaltsberechnung oder Wurzeln, aber auch Rundungsgenauigkeiten können betrachtet werden. Möglicherweise erfolgt die Gegenüberstellung verschiedener Lösungswege und verschiedener Lösungen erst während der Präsentation (mit Folien, Plakaten o. ä.). Dies hängt auch davon ab, wie stark eine Klasse mit dem Auffinden mehrerer Lösungswege vertraut ist. Besonders günstig erscheint, dass durch das Nebeneinanderstellen verschiedener Lösungswege heuristische Strategien, die bei der Lösung der Aufgabe hilfreich waren, explizit gemacht werden können. Wird während der Präsentations- oder der abschließenden Reflexionsphase thematisiert, wie beim Lösen der Aufgabe vorgegangen wurde, so darf angenommen werden, dass dies beim Bearbeiten ähnlicher Aufgaben hilfreich ist.

Dezentrale Arbeitsformen werden bisweilen wegen des Umgangs mit Fehlern, aber auch wegen des vermeintlich höheren Zeitaufwandes kritisiert. Da der Lehrer aber verstärkt die Rolle des Moderators und Beobachters innehat, kann er während solcher Phasen auftretende Fehler und Fehlvorstellungen besser beobachten und im Sinne einer besseren Diagnosechance genauere Informationen für anschließende Plenumsphasen gewinnen. Darüber hinaus hat der Lehrer Gelegenheit, individuell Schwierigkeiten zu diagnostizieren, falls erforderlich, individuell zu intervenieren und ggf. Hilfestellungen zu geben. Dezentrale Arbeitsformen führen nicht zu mehr Fehlern, sie lassen sie im Vergleich zum Unterrichtsgespräch nur offensichtlicher werden. Das zweite häufige Gegenargument kann in Teilen damit entkräftet werden, dass mit dem Einsatz veränderter Aufgaben ein Beitrag zum kumulativen Wissenserwerb geleistet werden kann, denn die Schüler können verstärkt lernen in Zusammenhängen zu denken. Die Schüler sind nach bisheriger Erkenntnis in solchen Phasen stärker gefordert, anzuwendende Mathematik im Sinne der vertikalen Vernetzung langfristig zu behalten, so dass in der Konsequenz zeitintensive vorbereitende Wiederholungsphasen deutlich reduziert werden können. Langfristig erweist sich der Einsatz veränderter Aufgaben mit schüleraktivierenden Methoden daher als effektiv.

Wenngleich die Umsetzung der vorgestellten Aufgaben und der als Anregungen für ihren unterrichtlichen Einsatz genannten Methoden nur in Abhängigkeit von der individuellen Lerngruppe, d. h. deren Leistungsstand und Grad der methodischen Kompetenz erfolgen kann und eine Progression im Umgang mit Aufgaben höherer Kompetenzklassen sowie eine methodische Progression der Schüler und des Lehrers erforderlich ist, möchten wir Sie ermutigen, bereits ab der 5. Klasse kontinuierlich solche veränderten Aufgaben, die stärker verständnisorientiert sind, im Unterricht einzusetzen und so einen Beitrag zur Qualitätsentwicklung des Mathematikunterrichts zu leisten.

Teil 3: Aufgabensammlung mit Lösungshinweisen

Ägyptische Kürbisse



Pyramide aus praller Frucht

In kräftigen Farben leuchtet die angeblich größte Kürbispyramide der Welt mit einer Höhe von 15 Metern und einer Seitenlänge von 20 Metern vor dem Residenzschloss in Ludwigsburg. Die Pyramide ist Mittelpunkt der noch bis zum 3.November 2002 dauernden Ausstellung „Kleopatras geheimnisvolle Kürbiswelt", die aus über 600 verschiedenen Kürbissorten gestaltet ist. (AP) Foto AP

a) Wie groß ist das Volumen der Pyramide?

b) Wie lang ist eine Seitenkante der Pyramide?

c) Auf der Spitze der Pyramide liegt ein Kürbis. In der ersten Schicht liegen acht Kürbisse, in der zweiten 16, in der dritten 24. Wie viele Kürbisse liegen in den ersten drei, vier, acht, 15 Schichten zusammen? Stelle eine Formel auf.

d) Begründe ohne zu Rechnen, wie groß die Winkel in einem Seitendreieck der Pyramide ungefähr sind.

e) Ein Kürbis wiegt im Durchschnitt ca. 9 kg. Welches Gesamtgewicht haben die Kürbisse auf den 25 Schichten der Pyramide? Runde das Ergebnis geeignet.

Hinweise zur Aufgabe „Ägyptische Kürbisse“

Mögliche Lösung:

a) 2000 m^3

b) ≈ 20,6 m

c) k: Nummer der Schicht
Anzahl aller Kürbisse in der k-ten Schicht = 8k (Ausnahme: Die Spitze der Pyramide bildet mit einem Kürbis die nullte Schicht)
Anzahl aller Kürbisse in den ersten k Schichten ergibt sich aus $(2k+1)^2$.
Anmerkung: Sinnvolle heuristische Hilfsmittel sind hierbei z.B. eine Tabelle und eine Skizze.

d) Seitendreieck: Alle drei Winkel sind ungefähr 60° groß, da es sich nahezu um ein gleichseitiges Dreieck handelt.
Anmerkung: Die Größe der Winkel könnte in Ergänzung rechnerisch mit Hilfe der Winkelfunktionen oder zeichnerisch ermittelt werden. Diese Teilaufgabe ist abhängig von Teilaufgabe b).

e) In den 25 Schichten liegen $(2 \cdot 25 + 1)^2 \approx 2600$ Kürbisse.
Bei 8 kg bis 10 kg schweren Kürbissen ergibt sich daraus ein Gesamtgewicht zwischen ca. 20800 kg und 26000 kg.
Geeignetes Runden (Anzahl der Kürbisse, Gesamtgewicht aller Kürbisse) sollte thematisiert werden.

Ergänzende Fragestellung:
Auf der Spitze der Pyramide liegt ein Kürbis. In der ersten Schicht liegen vier Kürbisse, in der zweiten acht, in der dritten zwölf. Wie viele Kürbisse liegen in den ersten drei, vier, acht, 15 Schichten zusammen? Stelle eine Formel auf.

Lösung:

$$1+\sum_{k=0}^{n} 4k=1+2k(k+1)=2k^2+2k+1$$

Mögliche methodische Umsetzung:
Partner-, Gruppenarbeit (Ziel: durch Rundung und Schätzung bedingte unterschiedliche Ergebnisse einander gegenüberstellen und bewerten)

Euro

Seit der Einführung des Euros am 01.01.2002 rechnen noch immer einige Leute in ihre ursprüngliche Währung um. So multiplizieren z.B. viele Deutsche die Euro-Preise mit 2, um den Preis in DM zu ermitteln (1 Euro entspricht 1,95583 DM). Unten abgebildet sind die Umrechnungskurse für die anderen Euro-Länder.

Land	**1 Euro entspricht**
Belgien	40,3399 BEF
Deutschland	1,95583 DM
Finnland	5,94573 FIM
Frankreich	6,55957 FRF
Griechenland	340,750 GRD
Irland	0,787564 IEP
Italien	1936,27 ITL
Luxemburg	40,3399 LUF
Niederlande	2,20371 NLG
Österreich	13,7603 ATS
Portugal	200,482 PTE
Spanien	166,386 ESP

a) Die Umrechnungskurse legen Vermutungen nahe, welches Land vor der Einführung des Euros die Scheine mit den größten Zahlen und welches die mit den kleinsten Zahlen hatte. Begründe deine Vermutungen und überprüfe diese ggf. anhand weiterer Informationsquellen.

b) Finde eine **einfache** Rechenmethode, wie Leute in Österreich, Frankreich und Spanien in ihre alte Währung umrechnen können.

c) Die kleinste DM-Münze war die 1-Pfennig-Münze (= 0,01 DM). Ist es dann überhaupt sinnvoll den Umrechnungskurs von € in DM auf 5 Nachkommastellen anzugeben (1 € = 1,95583 DM)? Begründe.

Hinweise zur Aufgabe „Euro“

Mögliche Lösung:

a) Da der Umrechnungsfaktor für italienische Lire am größten ist, ist nahe liegend, dass Italien das Land mit den größten Zahlen auf seinen Geldscheinen war. Wegen des kleinen Umrechnungsfaktors müsste u.a. Irland die entsprechend kleinste Banknote gehabt haben.

b) Österreich: Multiplikation des Preises in Euro mit 10, Addition des vierfachen Ausgangswertes.
Anm.: Der sich ergebende Vergleichswert ist etwas zu groß.
Frankreich: Multiplikation des Preises in Euro mit 6 und Addition des mit $\frac{1}{2}$ multiplizierten Ausgangswertes.
Spanien: Multiplikation des Preises in Euro mit 100 (Zwischenwert) und Addition des halben Zwischenwerts zum Zwischenwert.
Anm.: Der sich ergebende Vergleichswert ist zu klein und kann je nach Ausgangswert u. U. zu ungenau sein.

c) Erst bei größeren Geldbeträgen machen sich die fünf Nachkommastellen bemerkbar. Hätte man z.B. 1000 DM mit einem auf zwei Stellen gerundeten Umtauschkurs von 1,96 getauscht, so hätte man 510,20 € erhalten. Mit dem auf fünf Stellen angegebenen Kurs erhielte man aber 511,29 €.
(Ergänzende Frage: Ab welcher Summe würde man einen Unterschied zwischen dem auf zwei Nachkommastellen gerundeten und dem auf fünf Stellen angegebenen Wechselkurs merken?)

Mögliche methodische Umsetzung:
Partnerarbeit (gegenseitige Begründungen für die gefundenen Rechenmethoden nennen)

Hohn und Sport

MADRID, 5. Juli (dpa/FR). José María Aznar (49), spanischer Ministerpräsident und leidenschaftlicher Jogger, hat mit einer Bemerkung über seine sportlichen Leistungen am Freitag in der Presse seines Landes Spott geerntet. Bei der Vorstellung eines Buches erzählte der Regierungschef von einem Gespräch mit George W. Bush während des G-8-Gipfeltreffens in Kanada. Der US-Präsident habe damit geprahlt, dass er vier Kilometer in sechs Minuten und 24 Sekunden schaffe.
„Ich jogge zehn Kilometer in fünf Minuten und 20 Sekunden“, antwortete Aznar. „Zumindest darin sind wir den Amerikanern überlegen“, sagte er.

Warum hat Aznar mit seiner Bemerkung Spott geerntet?

Hinweise zur Aufgabe „Hohn und Sport“

Mögliche Lösung:

Aznar benötigt für einen Kilometer 32 Sekunden (entspricht ca. 112,5 km/h). Bush benötigt für 4 Kilometer 384 Sekunden (entspricht 0,1066 h). Dies entspricht 37,5 km/h oder 96 Sekunden für einen Kilometer. Das wäre mit 9,6 Sekunden auf 100m Sprintweltrekord. Der Weltrekord über 3000m liegt bei 7:20 Minuten. (http://www.sport1.de/coremedia/generator/www.sport1.de/Sportarten/Leichtathletik/Rekorde/Welt.html) (10.03.2004).
Ein durchschnittlicher Spaziergänger benötigt für 1 km Wegstrecke ca. 10 Minuten. Es ist nicht möglich, dass Bush gut 6mal so schnell läuft, noch unmöglicher ist, dass Aznar sogar ca. 20mal so schnell laufen kann. Anders formuliert, mit dieser Geschwindigkeit liefe Aznar einen Marathon in etwa 22 Minuten, Bush in ca. 67 Minuten. Beides wäre ’Weltrekord’.
Auch wenn man so in der Realität nicht rechnen darf, da Zeiten und Distanzen sich nicht proportional verhalten, so erlaubt diese Vorgehensweise zumindest eine Einschätzung der gemachten Angaben.
Anmerkung: *Diese Aufgabe könnte im Zusammenhang mit der Aufgabe „100 Meter Lauf“ (S. 44f) behandelt werden.*

Mögliche methodische Umsetzung:
Kugellager (Außenkreis: Analyse von Aznars Zeiten, Innenkreis: Analyse von Bushs Zeiten)

4 Vieren

Stelle mit vier Vieren und den dir bekannten Rechenzeichen die Zahlen von 0 bis 9 dar.

Hinweise zur Aufgabe „4 Vieren“

Mögliche Lösung:

0 = 4+4-4-4
= 4+4-(4+4)
= 4·4-4·4
= 4:4-4:4
= 4-4-(4-4)
1 = 4:4+4-4
= 4·4:(4·4)
= (4+4-4):4
2 = 4:4+4:4
= 4·4:(4+4)
3 = (4+4+4):4
= (4·4-4):4
4 = (4-4)·4+4
= (4-4):4+4
5 = (4·4+4):4
6 = (4+4):4+4
7 = 4+4-4:4
= -4:4+4+4 (mit Vorzeichen)
8 = 4+4+4-4
= 4·4-4-4
= (4+4):4·4
9 = 4:4+4+4

Anm.: Lässt man auch Zahlen wie 44 zu, so ergeben sich weitere Lösungen, beispielsweise 7=44:4-4

Mögliche methodische Umsetzung:
Einzelarbeit (Übung), Partnerarbeit und ggf. wachsende Gruppe mit anschließender Präsentation (Begründung der Richtigkeit verschiedener gefundener Lösungen). Dies ist eine typische Aufgabenstellung für produktives Üben.

Weihnachtliche Rechnung

Weihnachtliche Rechnung:

Eine Million Rentiere nötig

LONDON (dpa). Kinder, die an den Weihnachtsmann glauben, sollten nach einem gigantischen Schlitten Ausschau halten. Um jedem der weltweit 2,1 Milliarden Kinder ein Geschenk zu bringen, müsste der Mega-Schlitten von mehr als einer Million Rentieren gezogen werden und ein Ladevolumen von etwa 40,2 Millionen Kubikmeter bieten. Diese Rechnung stellte das Magazin *Reader's Digest* auf.

Der Weihnachtsmann müsste sehr reich sein, denn das Gesamtprojekt würde rund 252 Milliarden Euro verschlingen. Dabei entfielen 155 Milliarden Euro auf den Schlitten. Hinzu kämen 46 Euro pro Geschenk, was sich auf 96 Milliarden Euro summieren würde. Das Futter für die vielen Rentiere schlüge mit 1,2 Milliarden Euro zu Buche.

a) Gib die Kosten für das Futter der Rentiere in Millionen Euro an.

b) Wie hoch ist der prozentuale Anteil der Kosten für den Schlitten an den Gesamtkosten? Bestimme durch Überschlag.

c) Überprüfe, ob tatsächlich 2,1 Milliarden Kinder Geschenke bekommen.

d) Nimm an, dass alle Geschenke gleich groß sind. Wie wären dann die Maße eines Geschenks?

e) Wie viele Lastwagen benötigt man, um ein Ladevolumen von 40,2 Millionen Kubikmetern zu erhalten?

f) Stelle eine Modellrechnung auf, wie lange der Weihnachtsmann benötigt, um alle Geschenke auszuliefern. Wann müsste er damit beginnen?

Hinweise zur Aufgabe „Weihnachtliche Rechnung“

Mögliche Lösung:

Anm.: Zur Erleichterung der Texterschließung können ggf. Hilfen gegeben werden (z.B. Tabelle). Dem Eindruck, es handele sich hierbei um „richtige“ Zahlen, sollte entgegen gearbeitet werden.

a) 1 200 Millionen Euro

b) ≈ 60%

c) Rechnerisch: 96 Mrd. € : 46 € = 2.086.956.522 Kinder
96 Mrd. € : 2,1 Mrd Geschenke ≈ 45,7 € pro Geschenk
Es kann sich bei den Preisen und/oder bei der Anzahl der Kinder um gerundete Werte handeln. Dennoch passen die Angaben (rechnerisch) zusammen.
Mögliche Frage: Bekommen z.B. auch Moslems, Hindus Geschenke vom Weihnachtsmann???

d) 40,2 Mio. m^3 : 2,1 Mrd. Geschenke ≈ 0,02 m^3 pro Geschenk = 20000 cm^3 = 20 Liter
Ein Geschenk könnte z.B. bei quaderförmiger Verpackung etwa die Maße 20cm x 50cm x 20cm haben.

e) Angenommen, ein Lastwagen hat ein Ladevolumen von 25 Kubikmeter, dann benötigt man:
40 200 000 m^3 : 25 m^3 pro Lastwagen = 1 608 000 Lastwagen

f) Mögliche Modellierung: Die Erde hat einen Umfang von ca. 40000km. Dies ergibt einen Durchmesser von: $\frac{40000 \text{ km}}{\pi} \approx 12700 \text{ km}$
und eine Oberfläche von: ca. 500 000 000 km^2. Näherungsweise ist lediglich $\frac{1}{3}$ davon Landfläche, d.h. ca. 160 000 000 km^2. Nimmt man an, dass die 2,1 Milliarden Kinder überall und gleichverteilt auf der Landfläche leben, so hat jedes Kind ein Areal von:
160 000 000 km^2 : 2 100 000 000 ≈ 0,076 km^2 = 76000 m^2. Dies entspricht einem Quadrat mit einer Seitenlänge von etwa 275 m, so dass der Weihnachtsmann von einem Kind zum nächsten mindestens 275 m zurücklegen muss (die Kinder leben im Mittelpunkt ihrer quadratischen Areale). Der Weihnachtsmann müsste eine Gesamtstrecke von 275 m · 2 100 000 000 ≈ 580 000 000 km zurücklegen. Wenn man von einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 100 km/h ausgeht („Renn-tiere“) benötigt der Weihnachtsmann 5 800 000 Stunden. Dies entspricht bei einem 24stündigen Arbeitstag ca. 240 000 Tagen oder gerundet 660 Jahren. Ho Ho Ho…

Mögliche methodische Umsetzung:
Partner-, Gruppenarbeit (Analyse der Rundungsungenauigkeiten; gezielte Variation der gerundeten Werte; Analyse der Modellannahmen)

Im obigen Ausschnitt eines Werbeprospektes wird u.a. für den Ratenkauf einer Badezimmereinrichtung Werbung gemacht.

a) Überprüfe die Höhe der Monatsraten.

b) Um wie viel wurde der Preis reduziert?

c) Wie viel Prozent spart man gegenüber dem alten Preis?

d) Würdest du einem Kunden den Ratenkauf über 24 Monate oder die Einmalzahlung von 1896,- € empfehlen? Begründe.

e) Wie hoch wären die monatlichen Raten auf der Grundlage des ursprünglichen Preises gewesen?

Hinweise zur Aufgabe „00“

Mögliche Lösung:

a) 24 · 79 € = 1896 €
Die gemachten Angaben stimmen.

b) 770,90 €

c) 1 – (1896 € : 2666,90 €) ≈ 28,9%

d) Legt man 1896 € für zwei Jahre mit einer jährlichen Verzinsung von 2% fest und bestreitet die anfallenden Ratenzahlungen in Höhe von 79 € aus laufenden Einkünften, so erhielte man nach 24 Monaten ca. 76,60 € Zinsen. Hat man hingegen kein entsprechendes Guthaben, so entstehen durch den Ratenkauf keine zusätzlichen Kosten, da keine Zinsen gezahlt werden müssen.
Ob man sich aus anderen Gründen für oder gegen einen Ratenkauf entscheidet, ist von der individuellen Situation abhängig.

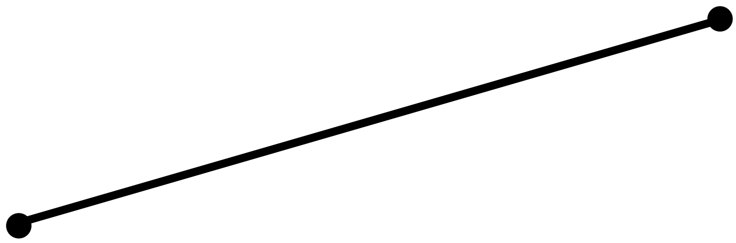
e) 2666,90 € : 24 ≈ 111 €.

Mögliche methodische Umsetzung:
Einzel-, Partnerarbeit (Entwicklung weiterer Zahlungsweisen)

Gestreckte Strecke

Eine Strecke wird zunächst um 50% verlängert und anschließend um 50% gekürzt.

Tim behauptet, dass man am Ende wieder die Länge der ursprünglichen Strecke erhält. Nimm dazu begründet Stellung.



Hinweise zur Aufgabe „Gestreckte Strecke“

Mögliche Lösung:

Tims Behauptung ist falsch. Bei der Verlängerung bildet die ursprüngliche Streckenlänge den Grundwert, bei der Verkürzung ist es aber die Länge der verlängerten Strecke. Somit kann sich nicht wieder die Länge der ursprünglichen Strecke ergeben.
Allgemein: Die Addition von %-Sätzen bei verschiedenen Grundwerten ist nicht zulässig.
Anm.: Im Sinne einer lerngruppenabhängigen, gestuften Herangehensweise kann die folgende Fragestellung vorbereitend bearbeitet werden:
Angenommen die Strecke ist zu Beginn 64 cm lang. Wie lang ist sie nach der Verlängerung?
Lösung: 96 cm

Mögliche methodische Umsetzung:
Einzelarbeit (Übung)

Zur rechten Zeit

Wie oft bilden der Minuten- und der Stundenzeiger einer Uhr am Tag einen rechten Winkel? Begründe.

Hinweise zur Aufgabe „Zur rechten Zeit“

Mögliche Lösung:

Beginnt man mit Uhrzeiten, zu denen beide Zeiger einen rechten Winkel einschließen (3 Uhr, 9 Uhr), so ergeben sich zwei Zeitintervalle.
Interwall 1 3.00 – 8.59 Uhr
Interwall 2 9.00 – 2.59 Uhr

Intervall 1)
Mit Ausnahme der Zeit von 8.00 – 8.59 Uhr bilden beide Zeiger in jeder Stunde zweimal einen rechten Winkel, in der letzten Stunde nur einmal. Somit entstehen $5 \cdot 2 + 1 = 11$ rechte Winkel.

Intervall 2)
Analog.

In 24 Stunden treten beide Intervalle je zweimal auf, somit entstehen insgesamt $4 \cdot 11 = 44$ rechte Winkel.

Mögliche methodische Umsetzung:
Partnerarbeit (Förderung heuristischer Strategien), ggf. Unterstützung durch Uhrenmodelle.

15 €-Schein

Ein Versandhaus verspricht seinen Kunden einen Gutschein im Wert von 15 €, wenn sie einen weiteren Kunden werben.

Welche Maße müsste ein 15 €-Schein haben, damit er zu existierenden Geldscheinen „passt"?

Zusatzinformationen:

5 €-Schein:	12 cm x 6,2 cm
10 €-Schein:	12,7 cm x 6,7 cm
20 €-Schein:	13,3 cm x 7,2 cm

Hinweise zur Aufgabe „15 €-Schein"

Mögliche Lösung:

Unabhängig vom Wert des 5-, 10-, 20-, 50 €-Scheins sind ihre Maße jeweils durch Streckung mit einem linearen Faktor von etwa 1,05 (ansatzabhängig) auseinander hervorgegangen. Neben einer rechnerischen ist auch eine zeichnerische Lösung möglich, bei der die Abweichung der Diagonalen zu thematisieren ist.

Länge der Diagonalen des 5 €-Scheins $d_5 = \sqrt{(12cm)^2+(6,2cm)^2} \approx 13,5cm$
Analog: $d_{10} \approx 14,4$ cm
$d_{20} \approx 15,1$ cm
$d_{50} \approx 16,0$ cm

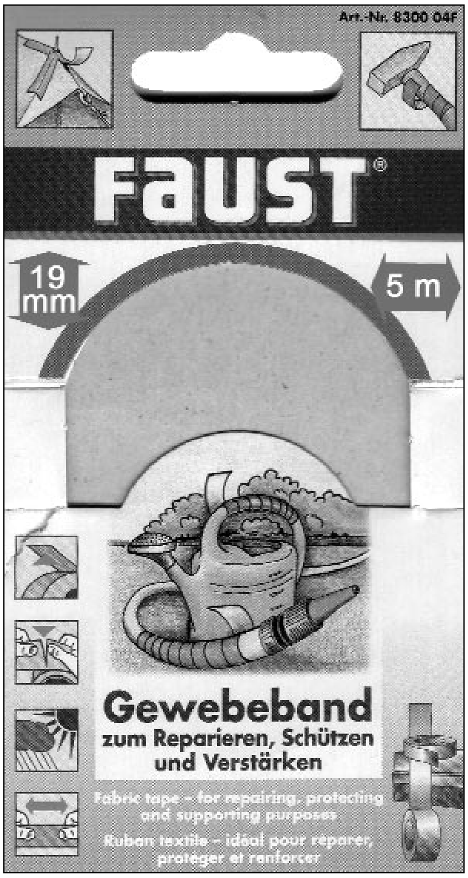
Streckfaktor $k \approx d_{20} : d_{10} = 15,1$ cm : $14,4$ cm $\approx 1,05$
Vom 10 €-Schein ausgehend ergeben sich für den 15 €-Schein folgende Länge und Breite: $12,7cm \cdot 1,05 \approx 13,3cm$
$6,7cm \cdot 1,05 \approx 7,0cm$

Mögliche methodische Umsetzung:
Wachsende Gruppe → Präsentation (Förderung der Argumentationsfähigkeit durch Beurteilung verschiedener Lösungsstrategien)

Gewebeband

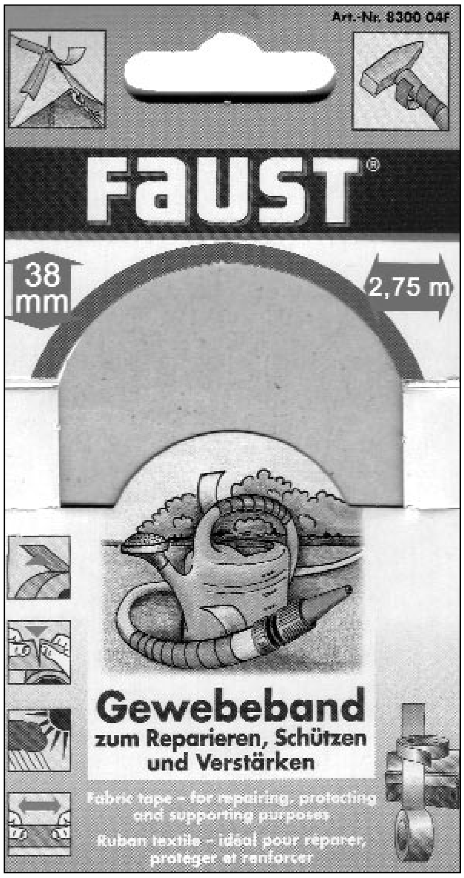
Eine Firma bietet Gewebeband in den folgenden beiden Größen an:

A



1,99 €

B



2,59 €

a) Welche Fläche könnte man mit Gewebeband A und welche mit dem rechten Gewebeband B bekleben?

b) Um wie viel Prozent ist das erste Gewebeband länger als das zweite?

c) Passen die Preise der beiden Gewebebänder zueinander? Begründe.

Hinweise zur Aufgabe „Gewebeband“

Mögliche Lösung:

a) A – 95000 mm^2
B – 104500 mm^2

b) ca. 82%

c) Beschränkt man sich lediglich auf die Kosten für das Gewebeband und lässt andere Faktoren wie z.B. Transport, Verpackung, Qualitätskontrollen etc. unberücksichtigt, kann man die Fläche und damit die Materialkosten zur Grundlage der Überlegungen machen.
Vergleicht man nur die Längen, so müsste das Gewebeband B 45% billiger als das andere sein. Vergleicht man nur die Breiten, so müsste das schmalere Gewebeband A halb so teuer wie das breite Gewebeband B sein. Der Vergleich der beklebbaren Flächen zeigt, dass man für den 1,3fachen Preis des Gewebebandes A bei Gewebeband B nur das 1,1fache der Fläche des ersten erhält. Also ist Gewebeband B relativ teurer, wenngleich sich dies nur abhängig vom Verwendungszweck tatsächlich beantworten lässt.

Mögliche methodische Umsetzung:
Wachsende Gruppe → Präsentation (Förderung der Argumentationsfähigkeit unter Berücksichtigung der in den Modellierungsprozess eingegangenen Modellannahmen zur Reflexion über die Angemessenheit des mathematischen Modells)

Kühles Nass

a) Wie lang sind alle Vierkantstreben des Beckens zusammen?

b) Zeichne ein Schrägbild des Beckens und vergleiche es mit dem Foto.

c) Das Becken soll mit einem Schlauch gefüllt werden, aus dem gleichmäßig Wasser fließt. Zeichne einen Füllgraphen.

d) Wie viel Liter Wasser passen maximal in das Becken?

e) Die Firma *Wasserwelt* verkauft ein weiteres Ruck-Zuck-Metall-Becken mit den Maßen 330 cm x 330 cm x 50 cm. Welchen Preis sollten sie dafür verlangen?

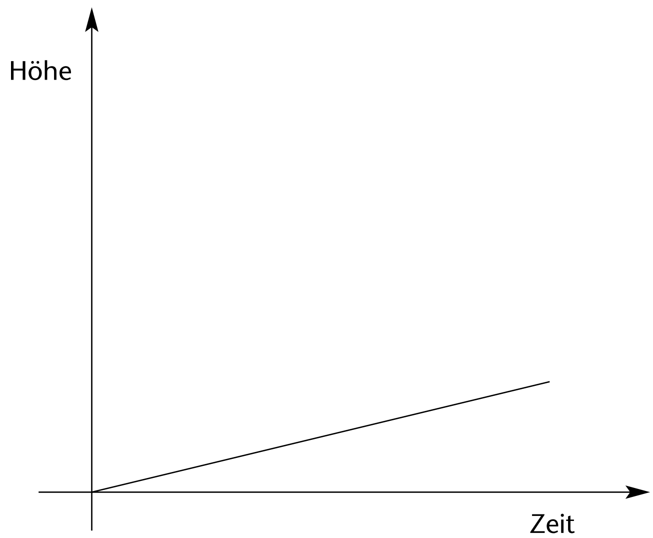
Hinweise zur Aufgabe „Kühles Nass“

Mögliche Lösung:

a) 960 cm

b) -—
Anm.: Die Wirkung der verschiedenen Darstellungen sollte thematisiert werden, insbesondere, dass die Abbildung ein rechteckiges Becken zeigt, die angegebenen Maße und der Text aber eine quadratische Grundfläche ausweisen.

c)



Ergänzend kann für einen weiteren Füllgraphen thematisiert werden, dass sich das Wasser zunächst in der Mitte des Beckens sammelt und das Becken sich im Verlauf des Befüllens etwas ausbeult. Beide Phänomene beeinflussen die Steigung des Füllgraphens.

d) ca. 1,36 m^3 = 1360 Liter (ohne Ausbeulung – mathematische Lösung)

e) z.B. den 4fachen Preis (Länge und Breite jeweils verdoppelt, Höhe beibehalten)

Mögliche methodische Umsetzung:
Einzelarbeit (Übung)