

Parallel- und Zentralprojektion des Raumes auf eine Ebene

Eine Unterrichtseinheit in Mathematik (Lineare Algebra)

Werner Fabian, Rita Ponndorf und Frank Rebenich

7. Juni 2003

Zusammenfassung

Es wird eine Unterrichtseinheit (Lineare Algebra) für den Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe skizziert, die in zwei Leistungskursen (Jgst. 12) in den Jahren 1998 und 2000 erprobt wurde.

Inhaltsverzeichnis

1	Bezüge, Motivationsmöglichkeiten	3
2	Sachanalyse	3
2.1	Parallelprojektion	4
2.1.1	Spezialfall	4
2.1.2	Alternative Vorgehensweise	4
2.1.3	Verzerrungsgrößen	5
2.1.3.1	Der Verzerrungsfaktor k	5
2.1.3.2	Der Verzerrungswinkel α	5
2.1.3.3	Projektionsrichtung	5
2.1.4	Zeichnungskonventionen bei Skizzen	5
2.2	Zentralprojektion	6
2.2.1	Spezialfall	6
2.2.2	Fluchtpunkte	6
2.2.3	Übergang zur Parallelprojektion	7
2.3	Bezeichnungen	7
3	Unterrichtliche Wege	8

4	Bisherige Erfahrungen	8
4.1	Sommer 1998 (Unterrichtseinheit mit abschließendem Unterrichtsbesuch; Frank Rebenich): . . .	8
4.2	Frühjahr 2000 (Unterrichtseinheit mit abschließender Examensstunde; Rita Ponndorf):	9
5	Ausblicke, Erweiterungen	11
5.1	Sonnenuhren	11
5.2	Anaglyphen	11
5.3	Autostereogramme	11
6	Materialien	12
6.1	Beispiel für einen Unterrichtsentwurf	
	Thema der Unterrichtsreihe: Projektion räumlicher Objekte in die Ebene	
	Thema der Unterrichtsstunde: Die Zentralprojektion	12
6.1.1	Lernziel der Unterrichtsstunde und Ablaufplan	12
6.1.2	Analyse der Unterrichtssituation	14
6.1.2.1	Zur Situation der Klasse	14
6.1.2.2	Behandelter Stoff	14
6.1.3	Didaktische Überlegungen zur Unterrichtsreihe und zur Stunde	14
6.1.4	Methodische Überlegungen zur Stunde	16
6.2	Beispiel für einen Unterrichtsentwurf (Examenslehrprobe)	
	Thema der Unterrichtsreihe: Projektionen im dreidimensionalen Raum	
	Thema der Unterrichtsstunde: Die Zentralprojektion	18
6.2.1	Analyse der Unterrichtssituation	18
6.2.1.1	Bild des Kurses	18
6.2.1.2	Stellenwert der Stunde in der Unterrichtsreihe	18
6.2.2	Sachanalyse	19
6.2.3	Didaktische Analyse	19
6.2.4	Lernziele	20
6.2.5	Methodische Analyse	21
6.2.5.1	Methodische Alternativen	21
6.2.5.2	Methodische Überlegungen zur Stunde	22
6.2.6	Geplantes Tafelbild	24
6.2.7	Grobplanung des Unterrichtsverlaufs	24
6.3	Aufgabensammlung	27
6.3.1	Aufgaben zur Parallelprojektion	27
6.3.2	Aufgaben zur Zentralprojektion	27

1 Bezüge, Motivationsmöglichkeiten

Projektionen des Raumes auf eine Fläche tauchen nicht nur wiederholt im Schulunterricht unterschiedlicher Jahrgangsstufen und Fächer, sondern auch im „täglichen Leben“ auf, wobei die zu Grunde liegende Problematik in der Regel nicht weiter thematisiert (und oft gar nicht erkannt) wird:

- Abbildung auf der Netzhaut¹: **Physik**unterricht in Klasse 8; **Biologie**unterricht in Klasse 9.
- Schattenwurf: **Physik**unterricht in Klasse 7, „Hand-Schattenspiele“
- Lochkamera: **Physik**unterricht in Klasse 7. Die formale Darstellung des Gegenstandes als aufrecht stehender Pfeil („Kerze“) verstellt oft die Einsicht, dass es sich um eine Projektion des *Raumes* handelt.
- „Schrägbilder“: Im **Mathematik**unterricht tauchen Schrägbilder in Parallelprojektion in Klasse 5 (Würfel, Quader), Klasse 8 (Prisma), Klasse 9 (Kreiszyylinder) und Klasse 10 (Pyramide, Kegel, Kugel) auf. Die zum Erstellen der Zeichnung erforderlichen Vorgaben (Verzerrungsrichtung und Verzerrungsmaßstab) erscheinen hier als willkürliche Setzungen. Auch die Pseudo-3D-Skizzen im Oberstufenunterricht (Lineare Algebra) zählen hierzu (unterschiedliche Lage der x_1 - x_2 - x_3 -Achsen).
- „Perspektive“: Das Thema wird im **Kunst**unterricht behandelt (Kl. 9: „Parallel- und Fluchtperspektive“). Hier taucht auch der Begriff des „Fluchtpunktes“ (als willkürliche Vorgabe) auf.
- Im „**täglichen Leben**“ wird auf die *Kinoleinwand*, den *Fernsehbildschirm* und den *Computermonitor* (Simulationen, Spiele) projiziert. Dass hier eine Projektion des Raumes stattfindet, ist in der Regel nicht bewusst. Auch bei *Sonnenuhren* wird eine Parallelprojektion in die Ebene genutzt.

2 Sachanalyse

Im Folgenden sollen diejenigen Grundlagen bereit gestellt werden, die für die hier beschriebene Unterrichtseinheit relevant sind. Eine umfassende Analyse der Projektionsthematik wird nicht angestrebt.

Die Parallelprojektion stellt einen Grenzfall der Zentralprojektion für einen „unendlich weit“ entfernten Augpunkt (s.u.) dar. Im Gegensatz zur Zentralprojektion lässt sich die Parallelprojektion jedoch bei geeigneter Wahl der Projektionsebene als *lineare Abbildung* beschreiben. Daher wird zunächst die Parallelprojektion betrachtet.

Zur Notation:

Die genauere Schreibweise (z.B.)

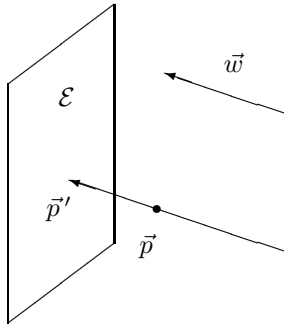
$g = \{ \vec{r} \in R^3 : \vec{r} = \vec{p} + \lambda \vec{w}; \lambda \in R \}$ wird im Folgenden durch

$g : \vec{r} = \vec{p} + \lambda \vec{w}$ abgekürzt.

¹Die Netzhaut ist gewölbt. Das Modell einer ebenen Fläche für die Netzhaut ist daher nur eine sehr grobe Näherung, die aber in Physikbüchern durchaus üblich ist.

2.1 Parallelprojektion

Ein beliebiger Punkt $\vec{p}$ des Raumes soll parallel zu einem fest vorgegebenen Richtungsvektor $\vec{w}$ in die Ebene $\mathcal{E}$ projiziert werden.



Der Bildpunkt $\vec{p}'$ entsteht durch Schnitt der Projektionsgeraden $g: \vec{r} = \vec{p} + \lambda \vec{w}$ mit der Ebene (Normalenform) $\mathcal{E}: \vec{n} \bullet \vec{r} = d$.

Einsetzen ergibt:

$$\vec{p}' = \vec{p} + \frac{d - \vec{n} \bullet \vec{p}}{\vec{n} \bullet \vec{w}} \cdot \vec{w} = M \cdot \vec{p} + \frac{d}{\vec{n} \bullet \vec{w}} \cdot \vec{w} \quad (1)$$

Die in (1) eingeführte lineare Abbildung M wird vermittelt durch die Matrix (cartesische Basis):

$$M = \frac{1}{\vec{n} \bullet \vec{w}} \cdot \begin{pmatrix} \vec{n} \bullet \vec{w} - n_1 w_1 & -n_2 w_1 & -n_3 w_1 \\ -n_1 w_2 & \vec{n} \bullet \vec{w} - n_2 w_2 & -n_3 w_2 \\ -n_1 w_3 & -n_2 w_3 & \vec{n} \bullet \vec{w} - n_3 w_3 \end{pmatrix}$$

Also ist die Parallelprojektion genau dann eine *lineare* Abbildung, wenn als Bildebene eine Ursprungsebene (d.h. $d = 0$, siehe (1)) gewählt wird (und wenn $\vec{n} \bullet \vec{w} \neq 0$).

Um zu beweisen, dass es sich wirklich um eine *Projektion* im mathematischen Sinne handelt, zeigt man mit (1), dass $(\vec{p}')' = \vec{p}'$ oder man benutzt die Matrixdarstellung, um explizit nachzuweisen dass $M^2 = M$.

Damit geht (1) über in:

$$\vec{p}' = \vec{p} - \frac{\vec{n} \bullet \vec{p}}{\vec{n} \bullet \vec{w}} \cdot \vec{w} = M \cdot \vec{p} \quad (2)$$

2.1.1 Spezialfall

Für praktische Zwecke, insbesondere für den Unterricht wird man o.B.d.A. eine der Koordinatenebenen als Projektionsebene wählen, z.B. die x_2 - x_3 -Ebene $\mathcal{E}_{23}$: Für $\vec{n}^0 = \vec{e}_1$ erhält man hier: $\vec{p}' = \vec{p} - \frac{p_1}{w_1} \cdot \vec{w} = M_{23} \cdot \vec{p}$ mit der Projektionsmatrix

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{w_2}{w_1} & 1 & 0 \\ -\frac{w_3}{w_1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Alternative Vorgehensweise

Bei Darstellung der Projektionsebene in *Parameterform*:

$\mathcal{E}: \vec{r} = \vec{r}_0 + \mu \vec{u} + \sigma \vec{v}$ ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$\vec{p} + \lambda \vec{w} = \vec{r}_0 + \mu \vec{u} + \sigma \vec{v} \quad (3)$$

Skalarmultiplikation mit $\vec{n} : \vec{u} \perp \vec{n} \perp \vec{v}$ führt auf die oben erhaltene Formel (1).

Soll das Skalarprodukt vermieden werden, so stellt (3) in Komponentenschreibweise ein Gleichungssystem für die Parameter dar, das z.B. mit dem Gauß-Algorithmus oder „zu Fuß“ gelöst werden kann.

Auch auf die Darstellung der Abbildungsvorschrift mit Hilfe einer Matrix kann verzichtet werden.

2.1.3 Verzerrungsgrößen

2.1.3.1 Der Verzerrungsfaktor k Er gibt an, um welchen Faktor eine senkrecht zur Projektionsebene verlaufende Strecke verkürzt (bzw. verlängert) erscheint, d.h.:

$$k = \left| \vec{n}^{0'} \right| = \dots = \sqrt{\frac{|\vec{w}|^2}{|\vec{n}^0 \bullet \vec{w}|^2} - 1} = \tan(\phi)$$

Dabei ist ϕ der Winkel, den die Projektionsrichtung mit dem Normalenvektor der Projektionsebene einschließt.

Bei Projektion auf die x_j - x_k -Ebene $\mathcal{E}_{jk}$ vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$k = \frac{1}{|w_i|} \cdot \sqrt{w_j^2 + w_k^2}.$$

2.1.3.2 Der Verzerrungswinkel α Betrachtet man speziell die Projektion auf die x_j - x_3 -Ebene $\mathcal{E}_{j3}$ (Kavalierprojektion), so ist α der Winkel zwischen dem Bild des Ebenen-Normalenvektors $\vec{e}_i$ und der x_j -Achse $\vec{e}_j$ ($j = 1$ oder $j = 2$):

$$\tan(\alpha) = \dots = \frac{w_3}{w_j}, \text{ bzw. } \cos(\alpha) = -\frac{w_j}{k \cdot w_i}, \sin(\alpha) = -\frac{w_3}{k \cdot w_i} \quad (i \neq j).$$

2.1.3.3 Projektionsrichtung Möchte man die Projektionsrichtung $\vec{w}$ aus vorgegebenem Verzerrungsfaktor und -winkel erhalten (z.B. zur Konstruktion von Aufgaben), so ergibt sich aus obigen Formeln z.B. speziell für die Projektion auf $\mathcal{E}_{23}$:

$$\vec{w}^0 = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -k \cdot \cos \alpha \\ -k \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

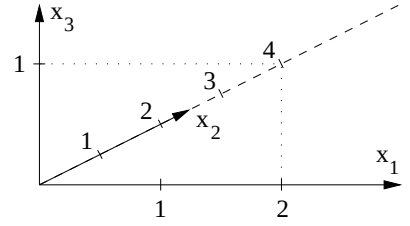
2.1.4 Zeichnungskonventionen bei Skizzen

Für Handskizzen oder Zeichnungen wird meist eine Kavalierprojektion (s.u.) in die $\mathcal{E}_{13}$ oder $\mathcal{E}_{23}$ benutzt. Je nach Lage der Objekte kann die eine oder die andere anschaulicher sein. Schülern erscheint die letztere Möglichkeit meist suspekt (die „nach vorne“ auf den Beobachter weisende x_1 -Achse ist ungewohnt).

Im Unterstufenunterricht wird oft mit $k = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 45^\circ$ gearbeitet. Das einfache Zeichnen der Tiefenlinien („diagonal“) wird hier damit erkauft, dass Längen in der Tiefenrichtung nicht an den Rechenkästchen abgezählt werden können, sondern abgemessen werden müssen. Ferner erscheinen beim Würfel die 1-3-Flächendiagonalen in gleicher Richtung wie die Tiefenkanten.

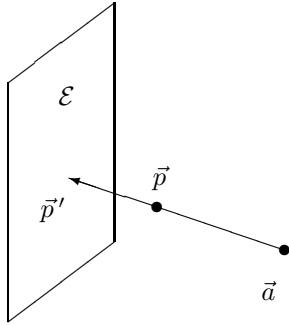
Eine etwas gefälligere Darstellung bekommt man mit $\alpha \approx 30^\circ$ [AT82, S. 88]. Hier ist eine Orientierung am Karopapier aber nicht möglich, man muss den Winkel abmessen.

Aus [AT84, S. 102] kann man folgende Konstruktion entnehmen: Die Achse, die in die Tiefe weist, wird mit der Steigung $\frac{1}{2}$ gezeichnet; ihre Achseneinteilung wird den anderen Achsen entnommen (s. Abb). Diese Konstruktion benutzt $k = \frac{\sqrt{5}}{4} \approx 0,6$ und $\alpha = \arctan(\frac{1}{2}) \approx 27^\circ$. Sie hat den Vorteil, dass bei Benutzung von Kästchenpapier Winkelmessungen und Längenmessungen nicht erforderlich sind (zumindest bei „gängigen“ Objekten).



2.2 Zentralprojektion

Ein beliebiger Punkt $\vec{p}$ des Raumes soll entlang der Verbindungslinie mit einem fest vorgegebenen „Augpunkt“ $\vec{a}$ in die Ebene $\mathcal{E}$ projiziert werden. Die „Projektionsstrahlen“ sind hier also – anders als bei der Parallelprojektion – nicht mehr parallel.



Der Bildpunkt $\vec{p}'$ entsteht durch Schnitt der Projektionsgeraden $g: \vec{r} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{p} - \vec{a})$ mit der Ebene (Normalenform) $\mathcal{E}: \vec{n} \bullet \vec{r} = d$.

Einsetzen ergibt:

$$\vec{p}' = \vec{a} + \frac{d - \vec{n} \bullet \vec{a}}{\vec{n} \bullet (\vec{p} - \vec{a})} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) \quad (4)$$

Da das Urbild $\vec{p}$ im Nenner erscheint, ist diese Abbildung nicht linear.

Alternativ könnte die Projektionsgerade auch als $g: \vec{r} = \vec{p} + \lambda \cdot (\vec{p} - \vec{a})$ angesetzt werden. Dies führt dann auf eine etwas andere Darstellung:

$$\vec{p}' = \vec{p} + \frac{d - \vec{n} \bullet \vec{p}}{\vec{n} \bullet (\vec{p} - \vec{a})} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) \quad (5)$$

2.2.1 Spezialfall

Die intuitiv nahe liegende Wahl der Projektionsebene als Ursprungsebene (insbesondere Koordinatenebene) führt zu keiner wesentlichen Vereinfachung.

Legt man jedoch den *Augpunkt* in den Ursprung ($\vec{a} = \vec{0}$), vereinfacht sich (4) zu

$$\vec{p}' = \frac{d}{\vec{n} \bullet \vec{p}} \cdot \vec{p}$$

Wählt man (wie oben) eine zu $\mathcal{E}_{23}$ parallele Ebene als Projektionsebene, wird $\vec{p}' = \frac{d}{p_1} \cdot \vec{p}$

2.2.2 Fluchtpunkte

Es wird die Bildmenge einer Geraden $g: \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{u}$ unter der Abbildung (4) betrachtet. Setzt man $\vec{p} = \vec{r}$ ein, so erhält man:

$$\vec{p}' = \vec{a} + (d - \vec{n} \bullet \vec{a}) \cdot \frac{\vec{r}_0 - \vec{a} + \lambda \vec{u}}{\vec{n} \bullet (\vec{r}_0 - \vec{a} + \lambda \vec{u})} \quad (6)$$

Im Grenzfalle² $\lambda \rightarrow \infty$ wird

$$\vec{p}'_{Flucht} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \vec{p}' = \vec{a} + \frac{(d - \vec{n} \bullet \vec{a}) \cdot \vec{u}}{\vec{n} \bullet \vec{u}}$$

Für den Spezialfall $\vec{a} = \vec{0}$ vereinfacht sich dies zu $\vec{p}'_{Flucht} = \frac{d \cdot \vec{u}}{\vec{n} \bullet \vec{u}}$.

Damit ist gezeigt: Die Bilder aller Geraden mit gleicher Richtung verlaufen durch den gleichen (Flucht-)Punkt.

Die üblicherweise angesprochenen *drei* Fluchtpunkte beziehen sich auf Geraden parallel zu den Achsen eines orthogonalen Dreibeins.

Um die aus dem Kunstunterricht bekannte Fluchtpunktkonstruktion zu rechtfertigen, muss noch gezeigt werden, dass das Bild einer Geraden wieder eine Gerade ist. Wegen der Nichtlinearität von (4) bzw. (6) ist dies nicht selbstverständlich.

Man betrachtet den Verbindungsvektor zweier beliebiger Bildpunkte nach (6):

$$\vec{p}'(\lambda_2) - \vec{p}'(\lambda_1) = \dots = (Faktor) \cdot \vec{n} \times ((\vec{r}_0 - \vec{a}) \times \vec{u})$$

(*Faktor*) ist hierbei ein *Skalar*, der u.A. von λ_1 und λ_2 abhängt. Die *Richtung* des Terms ist von λ_1 und λ_2 aber unabhängig. Dies langt um zu zeigen, dass die Menge aller Bildpunkte eine Gerade ist.

2.2.3 Übergang zur Parallelprojektion

Ersetzt man in (5) $\vec{a}$ durch $\lambda \cdot \vec{w}$, so erhält man

$$\vec{p}' = \vec{p} + \frac{d - \vec{n} \bullet \vec{p}}{\lambda \cdot \vec{n} \bullet \vec{w} - \vec{n} \bullet \vec{p}} \cdot (\lambda \cdot \vec{w} - \vec{p}). \text{ Der Grenzübergang } \lambda \rightarrow \infty \text{ führt unmittelbar auf (1).}$$

2.3 Bezeichnungen

Die Bildebene wird oft als *Tafel*, die Bildfigur als *Riss* bezeichnet. Gilt bei einer Parallelprojektion $\vec{w} \perp \mathcal{E}_{Bild}$, so spricht man von einer *Normalprojektion*, ansonsten von einer *schrägen Parallelprojektion*. Ebenen parallel zur Bildebene heißen *Hauptebenen*.

Oft wird in Architektur und technischem Zeichnen das Koordinatensystem so eingerichtet, dass $\mathcal{E}_{12}$ als "Tischfläche" bzw. "Erdoberfläche" vorgestellt wird; $\vec{e}_3$ zeigt dann nach „oben“. Die Gegenstände bzw. Gebäude, die projiziert werden, stehen in der Regel mit ihrem (Fuß-)Boden auf einer Hauptebene zu $\mathcal{E}_{12}$, die Seitenflächen werden (wenn möglich) parallel zu $\mathcal{E}_{23}$ und $\mathcal{E}_{31}$ ausgerichtet (außer bei den sogenannten *Axonometrien*). Man nennt dann $\mathcal{E}_{12}$ die *Grundrissebene* und die beiden anderen Koordinatenebenen *Seitenrissebene* (Kreuzrissebene) und *Aufrissebene*. Die entsprechenden Bildfiguren in Normalprojektion sind *Grundriss* (Draufsicht), *Seiten-* bzw. *Kreuzriss* (Seitenansicht) und *Aufriss* (Vorderansicht).

Eine schräge Parallelprojektion in die Aufrissebene (i.d.R. $\mathcal{E}_{23}$) heißt *Kavalierprojektion*.

Eine schräge Parallelprojektion in die Grundrissebene, bei der Strecken parallel zu $\vec{e}_3$ in originaler Länge abgebildet werden ($k = 1$), heißt *Militärprojektion*.

²Für den Grenzübergang betrachtet man allgemein die k-te Komponente von (6). Zähler und Nenner des Bruches werden nun nach fallenden Potenzen von λ geordnet und man erhält mit Polynomdivision: $(\lambda \cdot u_k + \dots) : (\lambda \cdot \vec{n} \bullet \vec{u} + \dots) = \frac{u_k}{\vec{n} \bullet \vec{u}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

3 Unterrichtliche Wege

Folgende Kenntnisse sind erforderlich:

- Geraden im Raum (Punkt-Richtungsform und Zweipunkteform)
- Ebenen im Raum (Parameterform)
- Schnittmengen linearer Gebilde
- (kartesische oder affine) Koordinaten, Spaltenvektoren

Die Ebenendarstellung in Normalenform ist nicht unbedingt erforderlich.

Man kann sich auf die Behandlung der Parallelprojektion beschränken.

Wurden Drehungen im Raum bereits behandelt, so bietet sich eine Verknüpfung der beiden Themen an (siehe Aufgabensammlung).

4 Bisherige Erfahrungen

Die Unterrichtseinheit wurde von einer Referendarin und einem Referendar (in einem Fall im Rahmen einer Examenslehrprobe) mit sehr guten Erfolgen durchgeführt.

4.1 Sommer 1998 (Unterrichtseinheit mit abschließendem Unterrichtsbesuch; Frank Rebenich):

Die Unterrichtseinheit ist im Rahmen einer LK-Abschlusseinheit am Schuljahresende (Spline-Funktionen, Komplexe Zahlen, Parallel- und Zentralprojektion) angesiedelt.

Wegen Problemen mit der Zeitplanung des geplanten Unterrichtsbesuchs musste ein bereits begonnenes Schülerreferat über komplexe Zahlen unterbrochen werden.

Der Ablauf wurde sowohl von Schülern wie den beteiligten Lehrern positiv bewertet.

Der Zeitbedarf betrug sieben Schulstunden.

Datum	Zeitbedarf	Inhalt	Hausaufgabe
19.6.1998	Einzelstunde	Experiment: Projektion des Kantenmodells eines Würfels mit Lampe an die Wand (Tafel). → Parallelprojektion als Schnitt von Gerade und Ebene.	Projizierte Eckpunkte eines gegebenen Würfels bei gegebenem Richtungsvektor der Projektion berechnen und die Ansicht zeichnen. (Die dazu erforderlichen Angaben wurden ad-hoc gemacht.)
22.6.	Doppelstunde	ausf. HA-Besprechung, Formulierung der Parallelprojektion durch Matrix — Spalten der Matrix sind die Bilder der Basisvektoren. Bezug zu Drehung des Objekts / CAD	keine Hausaufgabe wegen des bevorstehenden Unterrichtsbesuchs.
23.6.	Doppelstunde	aus organisatorischen Gründen musste hier eine Fortsetzung des Schülerreferats über komplexe Zahlen eingeschoben werden	—
26.6.	Einzelstunde	Unterrichtsbesuch: Zentralprojektion/Perspektive (s. Entwurf unten: lief sehr gut).	versuchen, die Abbildungsgleichung als Matrix-Vektor-Glg. zu formulieren(!); Darstellung mit Augpunkt (0;-10;0) und überlegen, was passiert, wenn der Augpunkt „ins unendliche“ weicht.
29.6.	Doppelstunde	ausf. HA-Besprechung, Zentralprojektion nicht durch Matrix darstellbar. Rückgriff Parallelprojektion und Nachweis, dass $A \cdot A = A$. Nachweis: „Bei linearen Abbildungen sind Bilder paralleler Geraden wieder parallele Geraden.“ Herleitung der Fluchtpunktes aus der Abbildungsgleichung begonnen.	Herleitung der Fluchtpunktes zu Ende bringen
30.6.	(Doppel)stunde	ausf. HA-Besprechung (ca. eine Stunde), danach wurde das Schülerreferat über komplexe Zahlen wieder aufgenommen.	—

4.2 Frühjahr 2000 (Unterrichtseinheit mit abschließender Examensstunde; Rita Ponndorf):

Die Voraussetzungen für diese Unterrichtseinheit waren sehr günstig. Wegen eines Unterrichtsbesuchs über ein anderes Thema kannte die Referendarin die Klasse bereits seit Mitte Dezember 1999 und führte danach den Unterricht zwecks Vorbereitung der Examenslehrprobe nahtlos weiter.

Der Ablauf wurde sowohl von Schülern wie den beteiligten Lehrern positiv bewertet.

Der Zeitbedarf betrug zehn Schulstunden.

Datum	Zeitbedarf	Inhalt	Hausaufgabe
9.3.2000	Doppelstunde	Gegenüberstellung verschiedener Geraden- und Ebenengleichungen und Methoden der Schnittpunktermittlung. Präsenzübung: Schnittmenge Gerade/Ebene (beide in Parameterform) ermitteln. ([KHK74] S.77 Nr. 1)	(Zwei Aufgaben wie Präsenzübung) ([KHK74] S.77 Nr. 2,3)
13.3.	Einzelstunde	Beginn Parallelprojektion $R^3 \rightarrow R^2$ (in 2-3-Ebene). Experiment (Würfelmodell, Lampe, Schirm), Zeichnung	?
15.3.	Doppelstunde	Parallelprojektion im R^3 , Koordinatensystem, Geradengleichung der Projektionsgerade, Projektion durch Schnitt mit Gleichsetzungsverfahren. Darstellung der Abbildungsvorschrift als Matrix-Vektorgleichung, dabei kurzer Rückgriff auf definierende Eigenschaft $M \cdot M = M$. Präsenzübung: Ermitteln der Projektionsmatrizen für die Abbildung in die 1-2- und 1-3-Ebene.	Parallelprojektion eines durch Eck-Koordinaten $A(2;1;0)$, $B(4;1;0)$, $C(4;3;0)$, $D(2;3;0)$, $E(2;1;2)$, $F(4;1;2)$, $G(4;3;2)$, $H(2;3;2)$ gegebenen Würfels entlang einer gegebenen Projektionsrichtung $u=(1; 0,5; 2)$ in die 2-3-Ebene.
16.3.	Doppelstunde	Wiederholungen zu Linearität, Parallelität und Abbildung paralleler Geraden unter lin. Abbn. (Puffer wg. Examenslehrprobe) Präsenzübung: Projektion einer quadratischen Pyramide (Koordinaten ad hoc gegeben) entlang einer Projektionsrichtung $u=(0;-1;0)$ in die 1-3-Ebene: Bildpunkte berechnen und Zeichnung.	keine Hausaufgabe wegen der bevorstehenden Examenslehrprobe
17.3.	Einzelstunde	Examenslehrprobe: Zentralprojektion in die 2-3-Ebene. Nichtlinearität der Abbildung. (s. Entwurf unten: lief sehr gut).	Bild der geschätzten Flachdach-Koordinaten $A(-49; 0; 0)$, $B(-4; 0; 0)$, $C(-4; 16; 0)$, $D(-49; 16; 0)$ (alle in m) unter Zentralprojektion mit Augpunkt $a=(1; 5; 4)$ in die 23-Ebene (Fenster) berechnen und zeichnen.
20.3.	Einzelstunde	Nichtlinearität der Zentralprojektion, Fluchtpunkte.	Fluchtpunkte der Tiefengeraden beim Dach eines Häuschens (s. Aufgabe Z3 in der Aufgabensammlung)
22.3.	(Doppel)stunde	Allgemeine, formale Berechnung des Fluchtpunktes paralleler Geraden in Koordinatendarstellung (ca. eine Unterrichtsstunde). Danach weiter mit anderem Thema.	—

5 Ausblicke, Erweiterungen

5.1 Sonnenuhren

Der Mechanismus aller Sonnenuhren besteht im einfachsten Fall in der Parallelprojektion (Sonnenstrahlen) einer speziell ausgerichteten Halbgerade (Gnomon) auf eine Ebene (Ziffernblatt). Das eigentliche mathematische Problem besteht hier nicht in der Projektion, sondern darin, dass die Projektionsebene noch mindestens einmal gedreht werden muss (außer bei der Äquatorial-Uhr).

Die Beschreibung einer Unterrichtseinheit zu diesem Thema ist in Vorbereitung.

5.2 Anaglyphen

Dieses Mittel zur räumlichen Visualisierung von Objekten benutzt die Zentralprojektion von zwei Augpunkten aus.

5.3 Autostereogramme

Dieses Verfahren erlebte vor einigen Jahren einen allgemeinen Boom („Magic Eye“). Gegenüber den Anaglyphen hat es den Vorteil, dass keine Spezialbrille erforderlich ist.

6 Materialien

6.1 Beispiel für einen Unterrichtsentwurf

Thema der Unterrichtsreihe: Projektion räumlicher Objekte in die Ebene

Thema der Unterrichtsstunde: Die Zentralprojektion

(6. Unterrichtsentwurf in einem Leistungskurs Mathematik, JgSt. 12 vom 26.9.1998, Frank Rebenich)

6.1.1 Lernziel der Unterrichtsstunde und Ablaufplan

Die Schüler sollen das Prinzip der Zentralprojektion begreifen sowie eine allgemeine Formel für die Abbildungsvorschrift aufstellen.

Feinziele: Die Schüler³ sollen ...

1. erkennen, dass die Tiefenwirkung bei der Parallelprojektion nicht der menschlichen Sehweise entspricht, und sich überlegen, wie eine dieser Sehweise entsprechende Projektion aussehen müsste.
2. die Zentralprojektion als die der menschlichen Sehweise entsprechende Abbildung begreifen sowie das Abbildungsprinzip an sich begreifen:
Bildpunkte ergeben sich als Schnittpunkte der Lichtstrahlen vom Objekt zum Auge mit der Projektionsebene. (V)
3. das konkrete Experiment in das abstrakte Konzept der Linearen Algebra übertragen, indem sie die Zentralprojektion als Schnitt einer Projektionsebene mit bestimmten Projektionsgeraden auffassen. Ebene und Geraden sollen sie mit Hilfe von Vektoren in einem Koordinatensystem beschreiben sowie eine Bedingungsgleichung zum Finden der Abbildungsvorschrift aufstellen. (I, II, III)
4. ausgehend von der Bedingungsgleichung die Abbildungsvorschrift für die Zentralprojektion berechnen. (IV)

die mathematische Struktur der Abbildungsvorschrift sowie den Rechenweg rekapitulieren und, falls noch Zeit bleibt, die mathematischen Strukturen von Zentral- und Parallelprojektion vergleichen. (IV)

³Der Begriff "Schüler" schließt im Folgenden die weiblichen Kursteilnehmer mit ein.

Ablaufplan

Unterrichtsstufen/ Sozialformen	Aktionsformen des Lehrens und Lernens	Lerninhalt	Medien	Ziel
<u>Hinführung</u> L-Sch-Gespräch (frontal)	Der Lehrer weist auf die Tatsache hin, dass bei der <i>Parallelprojektion</i> die Tiefenwirkung räumlicher Objekte nur unzureichend wiedergegeben wird, und regt anschließend an, über andere Projektionen mit besserer Tiefenwirkung nachzudenken. Eventuell nennen die Schüler hier die ihnen aus dem Kunstunterricht bekannte <i>Zentralprojektion</i> .	Abbildungseigenschaften der Parallelprojektion	Tafel	1
<u>Erarbeitung 1</u> <u>Schülerversuch</u> (frontal) L-Sch-Gespräch (frontal)	Ein Drahtgittermodell eines Würfels wird hinter eine Glasscheibe gestellt. Ein Schüler, der den Würfel durch die Scheibe betrachtet, markiert auf der Scheibe die Abbilder der Eckpunkte des Würfels und verbindet diese Punkte mit einem Stift.	Die Tiefenwirkung wird mit der Parallelprojektion verglichen und der Begriff Zentralprojektion eingeführt. Abbildungsvorgänge beim „Sehen“	Drahtgitterwürfel, Plexiglasscheibe, Klebetiketten, Filzstift	2
<u>Erarbeitung 2a</u> L-Sch-Gespräch (frontal)	An Hand der Entwicklung einer Tafelskizze abstrahieren die Schüler von der Zentralprojektion beim Experiment auf eine Abbildung $f : R^3 \rightarrow R^2$, bei der sich die Bildpunkte als Schnittpunkte einer Geraden mit einer Projektionsebene ergeben. Gemeinsam entwickeln Lehrer und Schüler eine Bedingungsgleichung für die Abbildung f .	Schnittpunkte der Bildebene mit den Projektionsgeraden	Tafel, farbige Kreide	3
<u>Erarbeitung 2b</u> <u>Einzelarbeit</u>	Die Schüler errechnen die Abbildungsgleichung $(x_1', x_2', 0) = f(x_1, x_2, x_3)$	Abbildungsvorschrift der Zentralprojektion	Schülerhefte	4
<u>Auswertung</u> L-Sch-Gespräch (frontal)	Ein Schüler trägt seine Rechenergebnisse vor. Falls noch Zeit bleibt, wird die gefundene Abbildungsgleichung mit der der Parallelprojektion verglichen.	(s.o.) Abbildungsvorschrift der Parallelprojektion	Tafel, farbige Kreide	5
Hausaufgabe	a) Berechne und zeichne das Bild eines Würfels bei der Zentralprojektion an Hand vorgegebener Koordinaten von Würfel, Bildebene und Augpunkt. b) Wie ändert sich das Bild, wenn der Augpunkt unendlich weit von der Bildebene weggerückt wird?			

6.1.2 Analyse der Unterrichtssituation

6.1.2.1 Zur Situation der Klasse Den Leistungskurs M211 besuchen 4 Schülerinnen und 13 Schüler. Die meisten Kursteilnehmer sind dem Mentor schon aus seinem Unterricht in Jgst. 11 bekannt. Dort habe ich sie auch in meiner ersten mentorbegleiteten Unterrichtseinheit in Mathematik kennengelernt (Monotoniesatz). Andere Schüler kenne ich etwa aus dem Physik-Leistungskurs.

Das Arbeitsverhalten ist als äußerst zufriedenstellend zu bezeichnen. Die Schüler beteiligen sich rege am Unterrichtsgespräch und bringen gute Ideen ein. Man spürt, dass dieser Kurs lediglich aus Schülern besteht, die ein besonderes Interesse an diesem Fach haben. Dies zeigt sich nicht zuletzt daran, dass mehrere Schüler beim „Tag der Mathematik“, einem Mathematikwettbewerb für Schülergruppen in Bensheim, teilnahmen. Der Mentor bezeichnet diesen Leistungskurs als leistungsstark im Vergleich zu vorhergehenden.

Das soziale Klima in dieser Gruppe ist durchweg angenehm. Es herrscht eine rücksichtsvolle Atmosphäre in diesem Kurs, was z.B. daran erkennbar ist, dass die Schüler öfters Bezug auf die Redebeiträge ihrer Mitschüler nehmen.

6.1.2.2 Behandelte Stoff Übereinstimmend mit dem Kursstrukturplan [HKM91] wurden in Jahrgangsstufe 12/1 Ergänzungen zur Differentialrechnung und die Integralrechnung behandelt, in 12/2 die Analytische Geometrie und die Lineare Algebra. Von diesem Stoff des zweiten Halbjahres sind folgende Teilgebiete für meine Unterrichtseinheit relevant:

- Lineare Gleichungssysteme, Gauß-Algorithmus, Matrix-Vektor-Darstellung
- Abbildungen im zweidimensionalen Raum (R^2) mit Matrizen, speziell auch Drehungen
- Fixpunktgleichungen ($A^2 = A$) im R^2
- Bild und Kern einer Abbildung
- Ebenen- und Geradengleichungen in verschiedenen Formen, Schnitt von Ebenen mit Geraden

Den Begriff der Linearen Abbildung kennen die Kursteilnehmer bislang nur aus der Matrizenrechnung, aber noch nicht als eigenständiges Unterrichtsthema. Die Behandlung mathematischer Probleme wurde schon öfters mit Aufgabenstellungen aus der Physik motiviert (z. B. Trägheitsmomente, Strahlenoptik: Punkt- und Achsenspiegelung)

6.1.3 Didaktische Überlegungen zur Unterrichtsreihe und zur Stunde

Die von mir gewählte Unterrichtsreihe „Projektionen räumlicher Objekte in die Ebene stellt innerhalb eines Kurses über Lineare Algebra eher einen Exkurs dar. Das Thema bietet sich gegen Abschluss des Schuljahres an, weil sehr viele Themengebiete des bisherigen Unterrichts noch einmal aufgegriffen und in neuen Zusammenhängen verknüpft werden. Im Rahmen der Einheit werden alle vier Schlüsselqualifikationen, die der Kursstrukturplan für einen Leistungskurs in Linearer Algebra für die Jahrgangsstufe 12 vorgibt, aufgegriffen:

„Die Schülerinnen und Schüler sollen

- Objekte des Anschauungsraumes mit Hilfe von Vektoren beschreiben und untersuchen können (I)
- mit Verknüpfungen von Vektoren [...] in Anwendungssituationen sicher umgehen können (II)
- räumliche Sachverhalte zeichnerisch darstellen und Zeichnungen interpretieren können (III)
- Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme [...] bestimmen, interpretieren und auf ihre Struktur hin untersuchen können" [HKM91, siehe Seite 20](IV)

Die Unterrichtseinheit wurde von mir anhand von drei Literaturquellen zusammengestellt [AT82, S. 129ff], [FUH89, S. 78ff], [FUH87, S. 2ff]. An zwei Beispielen soll die grundsätzliche Vorgehensweise beim Projizieren erarbeitet werden. Als erstes Beispiel wählte ich die Parallelprojektion. Diese ist grundlegend für das Verständnis von CAD-Zeichenprogrammen. Es schließt sich als zweites Exempel die Zentralprojektion an, die zum Verständnis der räumlichen Darstellung etwa bei Computerspielen grundlegend ist. Da hiermit Bezüge zur außerschulischen Erfahrungswelt der Schüler geschaffen werden und überdies mehrere Schüler selbst programmieren, wirkt dieser Themenbereich bestimmt motivierend auf die Lerngruppe.

Das Lehrbuch der Schüler [AT82] behandelt die Matrizen der Art $A^2 = A$ sehr ausführlich und legt somit einen anderen Schwerpunkt. Zentralprojektionen werden dagegen nicht erwähnt.

Die beiden Lehrgänge für Informatikstudenten an einer Fernuniversität [FUH89], [FUH87] sind für einen Einblick in die Materie, so wie ich ihn mit dieser Einheit geben möchte, zu umfangreich und teilweise zu anspruchsvoll.

Die Einheit umfasst fünf Stunden.

Zunächst wird an Hand der Parallelprojektion erarbeitet, wie man prinzipiell räumliche Objekte auf eine Ebene (z. B. den Computerbildschirm) projizieren kann. Danach wird untersucht, wie diese Objekte gedreht und von verschiedenen Seiten betrachtet werden können. Außerdem wird eine Eigenschaft der Projektionsmatrizen wieder aufgegriffen, die den Schülern bei Fixpunktgleichungen im zweidimensionalen Raum schon begegnet ist: $A^2 = A$.

Die heutige Stunde ist die vierte der Einheit. In dieser Stunde soll die Zentralprojektion behandelt werden. Dieses Stundenthema tangiert außer der Mathematik nicht weniger als drei Unterrichtsfächer der Schüler und kann somit zu Recht mit dem Attribut „fächerverbindend“ belegt werden:

- Kunst (perspektivisches Zeichnen, „Fluchtpunktgeometrie“)
- Biologie (Vorgänge beim menschlichen „Sehen“)
- Physik (Strahlenoptik)

„Unterricht sollte so gestaltet werden, dass die Schüler Anwendung und Praxisbezug erfahren. Dies kann geschehen, indem man [...] Querverbindungen zu Naturwissenschaften und Technik, [und zur] Kunst [...] aufgreift.“ [HKM91, S. 2]

In der Abschlussstunde sollen die beiden Projektionen miteinander verglichen werden. Hier möchte ich nicht nur auf die mathematischen Strukturen eingehen (die Parallelprojektion stellt im Gegensatz zur Zentralprojektion eine lineare Abbildung dar), sondern auch auf die geometrische Verwandtschaft: die Parallelprojektion geht aus der Zentralprojektion durch das Verschieben des Augpunktes „ins Unendliche“ hervor.

6.1.4 Methodische Überlegungen zur Stunde

Der geplante Verlauf der heutigen Unterrichtsstunde orientiert sich an den Grundsätzen der genetischen Lehrmethode⁴, so wie sie Wittmann definiert:

„Eine Darstellung einer mathematischen Theorie heißt genetisch, wenn sie an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet ist.“ [WIT81, S. 131]

Ausgehend von den gleichen Überlegungen, die Künstler im Mittelalter zur Erforschung der Perspektive heranzogen, erschaffen bzw. entdecken die Schüler anhand des Schülerversuchs die Grundsätze der Zentralprojektion neu und übertragen diese in das neuzeitliche Konzept der Linearen Algebra, wobei die praktische Anwendung des Lehrgegenstandes (z. B. räumliche Darstellung von Objekten auf dem Computerbildschirm) stets motivationserhaltend den Hintergrund bildet.

Zu Beginn der Stunde greift der Lehrer die in den vorigen Stunden behandelte Parallelprojektion auf. Die Thematisierung der Tiefenwirkung dieser Projektion dient einerseits dem Anknüpfen die vergangenen Stunden, andererseits der Hinführung zur Problemstellung der heutigen Stunde: Gibt es Projektionen mit besserer Tiefenwirkung?

Der anschließende Schülerversuch führt den Schülern das Prinzip der Zentralprojektion „vor Augen“. Ein solcher Versuch ist angebracht, bevor zu einer zweidimensionalen Tafelskizze übergegangen wird, da es sich um komplizierte räumlich - geometrische Zusammenhänge handelt. Nur wenn an dieser Stelle die Abbildung als „Schnitt bestimmter Lichtstrahlen mit einer Projektionsebene“ von den Kursteilnehmern erkannt wird, ist auch gewährleistet, dass letztere in der Folgephase den Sachverhalt abstrahieren können.

Alternativ könnte man auch ein räumliches Objekt direkt durch das Klassenraumfenster betrachten und die Klebepunkte auf der Scheibe anbringen. Dieser Weg scheitert hier am Fehlen geeigneter Objekte außerhalb des Klassenraumes. Man könnte auch mittels einer Experimentierleuchte den Schattenwurf des Drahtgitterwürfels auf die Tafelebene projizieren. Diese Vorgehensweise hat den Nachteil, dass ihr der Bezug der Zentralprojektion zum „menschlichen Sehen“ fehlt.

In der Erarbeitungsphase 2a übertragen die Schüler das konkrete Experiment in das abstrakte Konzept der Linearen Algebra. Hierzu ist zunächst das Erstellen einer Tafelskizze dienlich. Allein diese zu erstellen, bedarf von den Schülern ein hohes Maß an räumlichem Vorstellungs- und Abstraktionsvermögen. Zusätzlich müssen die Schüler jetzt mit abstrakten Begriffen wie Ebene, Gerade, Schnittpunkt usw. operieren, diese mathematisch mittels Vektoren in einem Koordinatensystem darstellen und eine Bedingungsgleichung zum Finden der Abbildungsvorschrift aufstellen. Dieser komplexe Arbeitsauftrag ist am besten in gemeinsamer Großgruppenarbeit an der Tafel zu erledigen, wobei ein Schüler an der Tafel agiert und die Mitschüler ihm helfen. Meiner Erfahrung nach ist das Arbeiten in dieser Sozialform für diese Gruppe besonders fruchtbar, da, wie schon in der Beschreibung zur Lerngruppe beschrieben, die Beteiligung am Unterrichtsgespräch sehr hoch ist.

Der Lehrer agiert hierbei nicht nur als Moderator, sondern führt auch, zurückhaltend lenkend, den Prozess voran.

Im folgenden Unterrichtsschritt stellt das explizite Errechnen der Abbildungsvorschrift für Leistungskurschüler - nach dieser anspruchsvollen Vorarbeit - nur noch eine Routineaufgabe dar, die Übungs- und Wiederholungscharakter hat und zügig in Einzelarbeit erledigt werden kann.

⁴Zu Theorie und Praxis des genetischen Konzepts siehe auch [ML97].

In der Auswertungsphase trägt ein Schüler seine Rechnung dem Plenum vor. Dabei soll sich die Auswertung nicht auf das bloße Vergleichen der Schülerergebnisse beschränken. Wenn auch nur kurz, so muss doch die mathematische Struktur der Lösung analysiert und der Rechenweg rekapituliert werden. Wenn es die Zeit erlaubt, kann diese Projektion mit der Parallelprojektion verglichen und ein Ausblick auf die Anwendungsmöglichkeiten gegeben werden.

Die Hausaufgabe dient in idealer Weise als Verbindungsglied zwischen der heutigen und der nächsten Stunde, greift sie doch in ihrem ersten Teil auf das Stundenergebnis zurück, um in ihrem zweiten Teil auf das Thema der letzten Stunde der Einheit vorzubereiten.

6.2 Beispiel für einen Unterrichtsentwurf (Examenslehrprobe)

Thema der Unterrichtsreihe: Projektionen im dreidimensionalen Raum

Thema der Unterrichtsstunde: Die Zentralprojektion

(Examens-Unterrichtsentwurf in einem Leistungskurs Mathematik, JgSt. 12 vom 17.3.2000, Rita Ponndorf)

6.2.1 Analyse der Unterrichtssituation

6.2.1.1 Bild des Kurses Ich unterrichte den Kurs 12/5 seit Dezember 1999 im Fach Mathematik unter Anleitung meines Mentors. Dieser Leistungskurs wird von 3 Schülerinnen und 9 Schülern besucht. Auf Grund der geringen Kursteilnehmerzahl haben die Schüler⁵ und ich uns in dieser Zeit gut aneinander gewöhnt.

Die Arbeitsatmosphäre im Unterricht ist angenehm, was auch auf das gute Sozialverhalten der Schüler zurückzuführen ist. Das ist besonders in Stillarbeitsphasen bemerkbar, in denen sie sich oft gegenseitig unterstützen. Mit mündlichen Beiträgen aus den eigenen Reihen können die Schüler rücksichtsvoll, aber auch kritisch umgehen. Leider erfolgt dies noch zu selten aus eigenem Antrieb. Hier wird versucht, durch gezielte Impulse des Lehrers bzw. Weitergabe von Fragen oder auch Antworten an die anderen Kursteilnehmer, Diskussionen zwischen den Schülern zu provozieren.

Die mündlichen Unterrichtsaktivitäten beschränken sich fast ausschließlich auf die männlichen Kursteilnehmer. Das ist nur zum Teil durch die Schüchternheit der Mädchen begründet. Zwei der Schülerinnen sind mir bereits aus meinem eigenverantwortlichen Unterricht im vorigen Schuljahr bekannt. Schon in dieser Zeit arbeiteten sie vorrangig schriftlich mit. Die dritte Schülerin hat im Themenbereich „*Lineare Algebra*“ zahlreiche Stunden gefehlt, so dass hier momentan ein Leistungsausfall zu verzeichnen ist. Von Lehrerseite wird versucht, durch gezieltes Ansprechen der Schülerinnen diese aktiv in den Unterricht einzubeziehen. Jedoch ist hier Vorsicht geboten, da eine nicht erbrachte mündliche Leistung von den Mädchen als Peinlichkeit empfunden werden könnte und dann demotivierend wirken kann. Leider ist die Wahrscheinlichkeit hierfür sehr hoch, denn die Schülerinnen zählen zu den leistungsschwachen Kursteilnehmern.

Die Jungen in diesem Leistungskurs stehen mathematischen Erarbeitungen aufgeschlossen und mit Interesse gegenüber. Sie können neue Problemstellungen erkennen und sind motiviert, diese genauer zu untersuchen. Jedoch besteht in diesem Kurs die Schwierigkeit, dass die meisten Schüler bei jeder Aufgabe „das Rad neu erfinden“ wollen, anstatt auf bereits erarbeitete Kenntnisse zurückzugreifen. Ursache hierfür ist u.a. die mangelnde Verfügbarkeit von Vorkenntnissen. Diese Problematik zeigte sich besonders deutlich in den bisher geschriebenen Leistungsnachweisen. Die Ergebnisse der Klausuren stehen in keinem Verhältnis zu den mündlichen Leistungen der männlichen Kursteilnehmer. Aus diesem Grund besteht bei vor allem bei Erarbeitungen im Unterrichtsgespräch das Problem, dass die Lehreraktivitäten höher sind, als es für einen Leistungskurs angemessen ist. Damit soll vermieden werden, dass die Schüler sich in Grundlagendiskussionen verlieren.

Die genannten Aspekte spielen auch für die geplante Stunde eine Rolle und werden in den didaktischen und methodischen Überlegungen noch einmal aufgegriffen.

6.2.1.2 Stellenwert der Stunde in der Unterrichtsreihe Die Unterrichtsreihe *Projektionen im dreidimensionalen Raum* umfasst sechs Stunden. Die ersten drei Stunden beinhalteten die Parallelprojektion des

⁵Hier und im Folgenden sind mit „die Schüler“ sowohl Schüler als auch Schülerinnen gemeint.

dreidimensionalen Raumes auf eine von den Koordinatenachsen aufgespannte Ebene (Koordinatenebene). Dabei erfolgten die Betrachtungen in Analogie zu den linearen Abbildungen in der Ebene. Für die Projektion in die Koordinatenebenen stellten die Schüler Abbildungsvorschriften in Form von Projektionsmatrizen auf.

Die folgende Doppelstunde soll die Unterrichtsreihe abschließen. Dabei erfolgt die Betrachtung und Berechnung von Fluchtpunkten, die bei der Zentralprojektion in den Bildebenen entstehen.

Nach der Betrachtung der Zentralprojektion soll herausgearbeitet werden, dass die Parallelprojektion als Spezialfall angesehen werden kann. Sie geht aus der Zentralprojektion hervor, indem der *Augpunkt* ins „Unendliche“ verschoben wird. Von der heutigen Stunde wird also eine Verbindung zu den Erarbeitungen der vorherigen Stunden geschaffen. Ebenso werden von heute ausgehend weitere Begriffsbildungen und -untersuchungen vorgenommen. Die heutige Stunde stellt somit den Kern der Unterrichtsreihe dar.

6.2.2 Sachanalyse

In guter Näherung ist jedes Bild, das in unserem Auge auf der Netzhaut erzeugt wird, eine „*Zentralperspektive Abbildung*“ [SEE97] oder auch *Zentralprojektion*. Diese stellt eine spezielle Abbildung eines räumlichen Objektes in eine Ebene dar. Bei der Parallelprojektion werden alle Punkte des Raumes entlang paralleler Geraden abgebildet. Bei der Zentralprojektion hingegen wird jeder einzelne Punkt des abzubildenden Objektes mit dem sogenannten *Augpunkt* (z.B. einer punktförmigen Lichtquelle) durch eine Gerade verbunden. Diese Geraden sind offensichtlich nicht zueinander parallel und laufen in einer „zentralen Stelle“ zusammen. Wenn diese *Projektionsgeraden* eine Ebene schneiden, erzeugen sie dort eine Zentralperspektive Abbildung.

Die Koordinaten der Bildpunkte können leicht berechnet werden, da sie gerade die Schnittpunkte der jeweils betrachteten Gerade mit der Ebene sind. Da sich für alle Verbindungen zwischen Original- und Bildpunkten neue Geradengleichungen auf Grund verschiedener Richtungen ergeben, müssen die Koordinaten eines jeden Bildpunktes separat berechnet werden. Hier besteht der wesentliche Unterschied zur Parallelprojektion. Bei dieser werden alle Punkte des Raumes in die selbe Richtung, also durch die gleiche Abbildungsvorschrift auf die Ebene projiziert. Die Bildpunkte können somit durch die Anwendung einer Projektionsmatrix bestimmt werden.

6.2.3 Didaktische Analyse

An meiner Ausbildungsschule wird in der Jahrgangsstufe 12 II das Kursthema *Analytische Geometrie und Lineare Algebra* behandelt. In den *Kursstrukturplänen für die gymnasiale Oberstufe* [HKM91, S. 20/21] wird dieses Kursthema in zwei große Themen unterteilt: die *analytische Geometrie des R^3* und die *Linearen Gleichungssysteme*. Für den Leistungskurs ist mindestens ein drittes Thema verbindlich, wobei keine bestimmte Reihenfolge bei der Behandlung der Themen vorgesehen ist. Die beschriebene Unterrichtsreihe beinhaltet die weiteren Themen *Matrizen und Abbildungen* und *Sachprobleme aus verschiedenen Gebieten*, wobei diese in der heutigen Stunde miteinander verknüpft werden sollen.

Das Thema Zentralprojektion wird in keinem der mir zugänglichen Schulbüchern betrachtet. In den Büchern der Schüler wird in anschaulicher Darstellung die Parallelprojektion sowohl im zwei- [KHK74, S. 35] als auch im dreidimensionalen Raum [AT84, S. 50] beschrieben. In der Ausgabe des *Cornelsen*-Verlages [KL93] werden Projektionen zur Lösung von Abstandsaufgaben herangezogen. Die alte Ausgabe von *Lambacher Schweizer* [SCH70, S. 72] beschreibt in wenigen Sätzen die Zentralprojektion, beschränkt sich dann jedoch auf die Betrachtung der Parallelprojektion.

Ich halte die Behandlung der Zentralprojektion trotz ihres Nichterscheinens in der Schulbuchliteratur für wichtig und möchte die Worte von Günter Seebach anführen:

„Unsere Welt ist dreidimensional, die Bilder jedoch – insbesondere auf den Bildschirmen – sind zweidimensional. Der Umgang mit solchen Bildern setzt somit ein gut entwickeltes Vorstellungsvermögen voraus. Solche Fähigkeiten spielen wohl deshalb auch eine große Rolle bei Eignungstests (...). In der Schule sollten deshalb Wege aufgezeigt werden, solche Fähigkeiten zu entwickeln (...).“ [SEE97]

Des Weiteren ist der fächerübergreifende Aspekt der Zentralprojektion hervorzuheben. Sie spielt nicht nur im Fach Mathematik eine Rolle, sondern besitzt einen ebenso hohen Stellenwert in der Kunst (perspektivisches Zeichnen). Sie ist Teil der Vorgänge beim menschlichen „Sehen“ in der Biologie und ebenso fester Bestandteil der Strahlenoptik in der Physik (vgl. Unterrichtsentwurf Rebenich, s.o.). Der wohl aktuellste Anwendungsbezug ist in der Informatik zu finden. Der Darstellung räumlicher Objekte z.B. bei Computer-Graphik- und Designprogrammen und deren Variationen je nach „Blickwinkel“ auf dem Monitor liegen Berechnungen zur Zentralperspektiven Abbildungen zugrunde. Somit trägt diese Stunde dazu bei, *„dass die Schüler Anwendung und Praxisbezug erfahren“* [HKM91, S. 2]. Außerdem kann hiermit *„Bedeutung und Nutzen der Mathematik für andere Wissensgebiete deutlich“* gemacht werden [HKM91, S. 1] und somit die fachbezogene Motivation der Schüler gestärkt werden.

Obwohl generell von einer intrinsischen Motivation der Schüler ausgegangen werden kann, soll ein einfaches Experiment dazu dienen, die Lerngruppe für den Unterrichtsgegenstand zu interessieren. Dabei vermeide ich absichtlich den Einsatz eines Computers, obwohl durch diesen die Zentralperspektive Abbildung und besonders der Einfluss der Position des Augpunktes auf die Gestalt des Bildes schnell und exakt dargestellt werden kann. Jedoch geht durch das Medium Computer die *Natürlichkeit* der Zentralprojektion verloren, die von uns ganz unbewusst täglich wahrgenommen wird.

In der Phase der Problemanalyse muss die Zielsetzung dahingehend eingegrenzt werden, dass im Unterricht nur Projektionen von räumlichen Objekten in eine Ebene betrachtet werden. Somit kann die Abbildung auf die Netzhaut in unserem Auge zwar als Anwendungsbeispiel benannt werden, jedoch ist hier eine didaktische Reduktion vorzunehmen. Die Pupille des Auges muss als Augpunkt angesehen werden und eine Ebene zwischen Objekt und Auge als Bildebene hinzugefügt werden. Der Grund hierfür liegt darin, dass die Netzhaut des Auges als Halbkugel anzusehen ist. Das Aufstellen einer Abbildungsvorschrift für die Zentralprojektion ist den Schülern schon deshalb nicht möglich, weil sie bisher kein entsprechendes Verfahren für gekrümmte Flächen kennen gelernt haben. In allen Stunden der Unterrichtsreihe wird so verfahren, dass das Koordinatensystem so zwischen Augpunkt und Objekt positioniert wird, dass die Abbildung stets in eine Koordinatenebene erfolgt.

Die heutige Stunde dient nicht nur der Untersuchung von Zentralperspektiven Abbildungen, sondern verlangt in verschiedener Weise die Anwendung bereits erlernter Fertigkeiten. Dazu zählen insbesondere das Aufstellen eines Gleichungssystems durch Gleichsetzen von Geraden- und Ebenengleichung, die Parameterbestimmung und die Koordinatenberechnung. Auf Grund der beschriebenen Schwierigkeiten der Lerngruppe bei der Verwendung bekannter Techniken müssen diese Ziele explizit bei der Planung der Stunde berücksichtigt werden.

6.2.4 Lernziele

Hauptlernziel der Unterrichtsstunde:

Die Schüler können die Bildentstehung bei der Zentralprojektion beschreiben und eine Abbildungsvorschrift angeben.

Allgemein fachspezifische Lernziele:

Die Stunde soll im Einzelnen dazu beitragen, dass die Schüler...

...ein Freihandexperiment durchführen und beobachten können.

...Analogiebetrachtungen zu bereits erarbeiteten Sachverhalten vornehmen können.

...ihr Abstraktionsvermögen durch die Skizzierung eines Abbildungsvorganges schulen und anwenden können.

...bekannte Vorgehensweisen auf neue Problemstellungen übertragen können.

Fachspezifische Lernziele:

Die Schüler sollen in dieser Stunde...

...die Projektion an einer konkreten Handlung erfahren.

...erkennen, dass das Bild bei der Zentralprojektion sich von dem der Parallelprojektion vor allem dadurch unterscheidet, dass einige Bildgeraden (die Tiefenlinien) nicht mehr parallel verlaufen.

...die Bildentstehung bei der Zentralprojektion skizzieren.

...die Bildpunkte als Schnittpunkte der Projektionsgeraden mit der Ebene erkennen.

...Ebenen- und Geradengleichungen aufstellen, gleich setzen und das Gleichungssystem zur Problemlösung nutzen können. (Minimalziel)

...die erarbeitete Abbildungsvorschrift mit der für die Parallelprojektion vergleichen und wesentliche Unterschiede herausarbeiten. (Maximalziel)

6.2.5 Methodische Analyse

6.2.5.1 Methodische Alternativen Die Lerngruppe wird in Gruppen geteilt, von denen jede einen Gegenstand durch eine Glasscheibe betrachten und den Umriss auf der Scheibe nachzeichnen soll. In das Klassenzimmer wird ein Koordinatensystem so „hineingelegt“, dass das Objekt und der eigene Standpunkt durch Koordinaten beschreibbar werden. Die Glasscheiben werden so positioniert, dass sie als Koordinatenebenen angesehen werden können. Die Erarbeitung der Bildentstehung bei der Zentralprojektion kann also von den Schülern in Gruppenarbeit durchgeführt werden.

Ich halte die Erarbeitung in eigenständiger Gruppenarbeit in dieser Lerngruppe für ungeeignet. Der wesentlichste Grund hierfür liegt in der in der *Lerngruppenanalyse* beschriebenen Schwierigkeit der Anwendung bekannter Sachverhalte. Die betrachtete Methode sollte erst in späteren Unterrichtseinheiten angewendet werden, wenn die Schüler eigenständiger bezüglich des Transfers mathematischer Sätze auf neue Problemstellungen arbeiten.

Eine weitere Alternative besteht in dem in der *Didaktischen Analyse* bereits erwähnten Computereinsatz. Dieser könnte zur Motivation für den Unterrichtseinstieg dienen und im weiteren Stundenverlauf immer wieder zur Anschauung herangezogen werden. Die Anwendung könnte derart erfolgen, dass die Schüler die Bildpunkte eines gegebenen Objektes bei gegebenen Augpunktkoordinaten mit einem Computeralgebrasystem berechnen und anschließend graphisch darstellen lassen.

Ich möchte auch diese Idee verwerfen, da die Voraussetzungen bezüglich der Fertigkeiten der Schüler im Umgang mit dem Computer sehr inhomogen sind. Zudem halte ich es in diesem Kurs vorerst für wichtiger, die Anwendung manueller Fertigkeiten hinsichtlich mathematischer Problemstellungen zu routinieren.

Eine dritte Möglichkeit besteht darin, das Thema *Zentralprojektion* vorrangig im Unterrichtsgespräch zu erarbeiten. Die Motivation der Schüler für den Lerngegenstand kann durch eine Handlung erfolgen, welche das Nachzeichnen eines Gegenstandes (s. Alternative a)) beinhaltet. Im weiteren Verlauf der Stunde werden im Unterrichtsgespräch die Vorgänge bei dieser Abbildung sowie die Berechnungsmöglichkeiten für die Bildpunkte diskutiert. Hier sollen von den Schülern vor allem Transferleistungen zu der bereits bekannten Parallelprojektion erbracht werden.

Ich habe mich für Alternative c) entschieden, da sie den Ansprüchen der Lerngruppe am ehesten gerecht wird. Im folgenden Abschnitt soll das geplante Vorgehen genauer analysiert werden.

6.2.5.2 Methodische Überlegungen zur Stunde Der Unterrichtseinstieg soll durch ein Freihandexperiment erfolgen.

„Die Schüler sollen, wann immer und wo immer dies möglich ist, im handelnden Umgang mit dem neuen Thema an sich selbst erfahren oder erproben können, wo das neue Thema für sie interessant ist, (...) wo sie noch was Neues lernen, wo sie Vertrautes in Erinnerung rufen können.“ [MEY89, S. 133]

Ich habe einen solchen handelnden Unterrichtseinstieg gewählt, weil dadurch der Anwendungsbezug der Zentralprojektion in unserer Umwelt besonders deutlich wird. Außerdem haben in dieser Phase die Schülerinnen die Möglichkeit, aktiv in das Unterrichtsgeschehen einzugreifen. Sollte sich keines der Mädchen für die Versuchsdurchführung melden, werde ich eine Schülerin zur Handlung auffordern. Das soll dazu beitragen, dass die Mädchen ihre Schüchternheit gegenüber den zahlenmäßig überlegenen Jungen abbauen und zu eigenen Stellungnahmen bereit sind.

In dem Einstiegsexperiment geht es darum, die Umrisse eines durch die Fenster sichtbaren Gebäudes auf die Fensterscheibe zu malen. Alternativ kann auch ein Drahtgitterkörper durch eine Glasscheibe betrachtet und nachgezeichnet werden. Ich bevorzuge die erste Variante, da hier die bereits angesprochene Natürlichkeit der Zentralprojektion am deutlichsten wird.

Die folgende Phase dient der Auswertung des Experiments und der Hinführung zum Schwerpunkt der Unterrichtsstunde. Die Schüler sollen das entstandene Bild mit der Bildentstehung bei der Parallelprojektion vergleichen, um Unterschiede aber auch Gemeinsamkeiten herauszuarbeiten. Das Gespräch in dieser Unterrichtsphase soll vor allem dazu dienen, dass die Schüler die von der Parallelprojektion bekannte Problemlösestrategie auf die heutige Problemstellung transferieren. Möglicherweise sind dazu Hilfestellungen meinerseits nötig. Deshalb wird das Lehrer-Schüler-Gespräch die vorherrschende Sozialform in dieser Phase sein.

Der größte Teil der Stunde dient der Erarbeitung, wobei die drei Erarbeitungsphasen unterschiedlichen Charakter besitzen (nach [MEY89, S. 151ff.]). Die erste Phase dient der *Aufarbeitung* der vorher analysierten Sachverhalte in mathematischem bzw. geometrischem Zusammenhang. Die Darstellung der Projektion an der Tafel verlangt ein hohes Abstraktionsvermögen, da hier die Abbildung eines räumlichen Objektes in eine Ebene bereits in einer Ebene (der Tafel) erfolgen soll. Die Veranschaulichung in Form einer Verlaufsskizze halte ich für nötig, da sie die folgende Erarbeitung erleichtern wird. Ein Schüler soll den Abbildungsvorgang mit Hilfe der anderen Schüler an der Tafel skizzieren. Aus diesem Grund soll das Schüler-Schüler-Gespräch diese Phase charakterisieren.

Die nächste Erarbeitungsphase kann als *Arbeit an der Lernaufgabe* beschrieben werden. Hier soll im Gespräch eine Problemlösestrategie entwickelt werden, wobei in ähnlicher Weise verfahren werden soll wie bei der Aufstellung einer Abbildungsvorschrift für die Parallelprojektion. Diese Unterrichtsstufe wird im Lehrer-Schüler-Gespräch gestaltet, wobei sich die Lehreraktivitäten auf Impulse und die Entwicklung des Tafelbildes beschränken sollen.

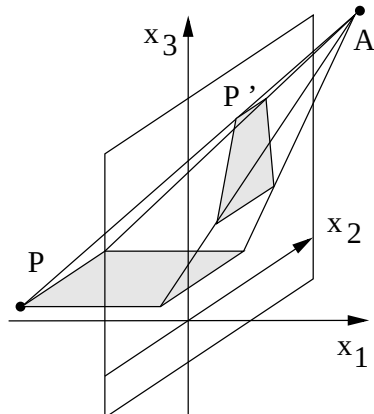
Die dritte Erarbeitungsphase beinhaltet die *Stufe der Lösung*. Hier haben die Schüler die Aufgabe, in Einzel- oder Partnerarbeit den erarbeiteten Lösungsansatz fortzuführen und eine Abbildungsvorschrift für die Zentralprojektion in eine Koordinatenebene aufzustellen.

Jede der Erarbeitungsphasen soll durch eine kurze Ergebnissicherung abgeschlossen werden. Diese erfolgt jeweils durch die Vervollständigung des Tafelbildes meinerseits bzw. Rekapitulation der erarbeiteten Sachverhalte durch die Schüler. Somit erhalten die Schüler einen Überblick über das von ihnen Geleistete. Zudem spiegelt das Tafelbild den Stundenverlauf wieder.

Die abschließende Phase, die je nach zeitlichem Rahmen ausgedehnt werden kann, dient der Festigung der heutigen Erarbeitungen im Lehrer-Schüler-Gespräch. Die Schüler sollen dabei die ausgeführten Arbeitsschritte dieser Stunde mit denen vergleichen, die in den vergangenen Stunden vorgenommen wurden. Dadurch soll der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Projektionen herausgearbeitet werden. An dieser Stelle ist ein Erfolg zu verzeichnen, wenn die Schüler eigenständig erkennen, dass die Darstellung der Abbildung durch eine Matrix bei der Zentralprojektion nicht möglich ist. Die Begründung soll über die Eigenschaft einer linearen Abbildung, parallele Objekt-Geraden in parallele Bild-Geraden zu überführen, erfolgen.

6.2.6 Geplantes Tafelbild

linke Tafelhälfte:



A – Augpunkt
 x_2 - x_3 -Ebene – Bildebene

rechte Tafelhälfte:

allgemeine Koordinaten des Bildpunktes
in der x_2 - x_3 -Ebene:

$$\vec{p'} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \frac{-a_1}{a_1 - p_1} \begin{pmatrix} a_1 - p_1 \\ a_2 - p_2 \\ a_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

Tafelmitte:

Die Zentralprojektion

Ebene, in die abgebildet wird: $\mathcal{E}: \vec{x} = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gerade durch Augpunkt A und Objektpunkt (z.B. P): $g_{AP}: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 - p_1 \\ a_2 - p_2 \\ a_3 - p_3 \end{pmatrix}$

Bildpunkt P' : Schnittpunkt der Geraden g mit der x_2 - x_3 -Ebene, d.h.:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 - p_1 \\ a_2 - p_2 \\ a_3 - p_3 \end{pmatrix} = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6.2.7 Grobplanung des Unterrichtsverlaufs

Unterrichtsstufe/ Sozialform	Geplante Lehreraktivität	Erwartetes Schülerverhalten	Medien
---------------------------------	--------------------------	-----------------------------	--------

<u>Einstieg</u> Schülerexperiment	• bittet einen S., die sichtbaren Ecken des Daches unterhalb des Fensters durch Klebepunkte zu markieren u. diese durch Linien zu verbinden	• ein(e) Schüler(in) führt Experiment aus	Fenster, Klebe- punkte, Boardmar- ker
<u>Hinführung</u> L-S-Gespräch	• fragt nach Unterschied zum Bild, welches bei der Parallelprojektion entstanden ist • fragt nach möglichen Ursachen	• Tiefenlinien sind nicht parallel (Tiefenwirkung) • erkennen, dass der Gegenstand in unser Auge „abgebildet“ und dass somit die Richtungen der Geraden zwischen Objekt und Bild im Gegensatz zur Parallelprojektion nicht alle gleich sind	Fenster
<u>Erarbeitung 1</u> S-S-Gespräch, L-S-Gespräch	• fordert Darstellung der Projektion im Tafelbild analog zum Lichtstrahlenmodell bei der Parallelprojektion • benennt diese Projektion als Zentralprojektion • führt Begriffe Augpunkt und Bildebene ein	• ein S. skizziert die Projektion im Tafelbild • eventuell benennt ein S. diese Abbildung als die aus dem Kunstunterricht bekannte Zentralprojektion bzw. perspektivische Abbildung	Tafel
<u>Erarbeitung 2</u> L-S-Gespräch	• formuliert Ziel: Bildpunkt auf der entsprechenden Ebene bestimmen – Vorgehensweise? • fordert die Benennung der zur Bildpunktbestimmung nötigen Sachverhalte (Ebenen- u. Geradengleichung; Gleichsetzungsverfahren)	• erarbeiten im Gespräch, dass der gesuchte Bildpunkt in diesem Spezialfall der Spurpunkt der Gerade ist, die durch Augpunkt und Objekt eindeutig bestimmt ist • geben Ebenen- u. Geradengleichung an und setzen sie gleich	Tafel
<u>Erarbeitung 3</u> Schülerstillarbeit	• beaufsichtigt Stillarbeit, gibt individuelle Hilfestellungen	• berechnen den Parameter in der Geradengleichung und damit die Koordinaten des Bildpunktes	Schüler- unter- lagen; Tafel

<u>Ergebnissicherung</u> L-S-Gespräch	• fragt nach Ergebnissen der Rechnung • ein S. schreibt Ergebnis an Tafel	Schüler- unter- lagen; Tafel
Minimalziel	HA: Berechne und zeichne die Bildpunkte, die bei der Zentralprojektion des Daches in die x_2 - x_3 -Ebene entstehen, wenn folgende Koordinaten (...) gegeben sind!	
<u>Festigung</u> L-S-Gespräch	• fragt nach wesentlichen Eigenschaften dieser Abbildung, insbesondere im Vergleich zur Parallelprojektion • rekapitulieren Entwicklung der Abbildungsvorschrift und vergleichen die mathematische Struktur mit der Parallelprojektion	Tafel
Maximalziel	HA: siehe Minimalziel	

6.3 Aufgabensammlung

6.3.1 Aufgaben zur Parallelprojektion

P1) Im $\mathbf{R}^3$ ist ein Würfel durch seine Objektmatrix gegeben:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- _a) Stellen Sie die Situation in einer Pseudo-3D-Grafik dar. Der Würfel soll in (senkrechter) Parallelprojektion in Richtung $\overline{GA}$ betrachtet werden. Dafür geht man folgendermaßen vor:
i) Der Würfel wird zunächst so weit um die x_3 -Achse gedreht, dass der Punkt G in die x_1 - x_3 -Ebene fällt.
ii) Der Würfel wird danach so weit um die x_2 -Achse gedreht, dass der Punkt G auf die x_3 -Achse fällt.
- _b) Geben Sie Sinus und Cosinus der Winkel bei i) und ii) an.
- _c) Geben Sie eine Matrix an, die die oben beschriebene Abbildung vermittelt.
- _d) Wenden Sie diese Matrix auf die Objektmatrix an.
- _e) Zeichnen Sie die erhaltene Projektion auf die x_1 - x_2 -Ebene.
- _f) Man könnte den Würfel auch um die zweite Winkelhalbierende der x_1 - x_2 -Ebene drehen, so dass G auf die x_3 -Achse fällt. Würde dadurch das Gleiche bewirkt wie oben unter i) und ii) angegeben?

6.3.2 Aufgaben zur Zentralprojektion

Z1) Vom Augpunkt $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ aus soll eine Zentralprojektion eines beliebigen Punktes $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbf{R}^3$ auf die x_2 - x_3 -Ebene $\mathcal{E}_{23}$ durchgeführt werden.

a) Leiten Sie einen Term für den Bildpunkt $\vec{p}'$ her (allgemein).

b) Eine Pyramide wird gegeben durch die Objektmatrix $M = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Projizieren Sie von $\vec{a} = 2 \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ aus und zeichnen Sie die erhaltene Projektion der Pyramide auf die x_2 - x_3 -Ebene.

c) Wo liegt der x_2 - x_3 -Fluchtpunkt der Bildgeraden von $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AD}$?
[FluP(AD)=2·e₃]

- c') Wo liegt der x_2 - x_3 -Fluchtpunkt der Bildgeraden von $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$?
 [FluP(AB) = $4 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3$]

Z2) Im $\mathbf{R}^3$ ist eine quadratische Säule (Prisma) durch ihre Objektmatrix gegeben:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1,5 & 1,5 & 1,5 & 1,5 \end{pmatrix}$$

- a) Vom Augpunkt $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus wird die Säule zentral in die 1-3-Ebene projiziert. Ermitteln Sie die Bildmatrix (zunächst formal, dann erst Zahlenwerte!) und stellen Sie die Ansicht in der 1-3-Ebene in einer Zeichnung dar. (Verdeckte Kanten bitte stricheln!)
- b) Ermitteln Sie die Fluchtpunkte der Kanten der Säule (zunächst formal, dann erst Zahlenwerte!) und vergleichen Sie mit Ihrer Zeichnung.

Z3) Die Eck-Koordinaten eines „Häuschens“ werden durch die Objekt-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Vom Augpunkt $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ aus wird eine Zentralprojektion in die 2-3-Ebene durchgeführt.

- a) Berechnen Sie die Koordinaten der Bildpunkte und zeichnen Sie die Ansicht in der 2-3-Ebene. ($x_2 = -6 \dots 9$; $x_3 = -5 \dots 8$)
- b) Zeichnen und berechnen Sie den Fluchtpunkt der Tiefenlinien (z.B. $\overline{AD}$). [(8;7)]
 [Achtung: „Tiefe“ hängt ab von der Zeichnungskonvention, hier: x_1 nach vorne]
- c) Berechnen Sie den Fluchtpunkt der auf den Beobachter zu laufenden Dachkanten ($\overline{EI}$, $\overline{FJ}$).
 [Achtung: (s.o.)!]

Z4) Ein Würfel der Seitenlänge 2 steht mit seiner Grundfläche („Boden“) auf der 1-2-Ebene, so dass die vier Ecken der Grundfläche auf der ersten und zweiten Winkelhalbierenden liegen.

- a) Der Würfel wird nun um die x_3 -Achse um 45° gedreht. Geben Sie die Objektmatrix des gedrehten Würfels an.
- b) Der gedrehte Würfel aus Teilaufgabe a wird nun vom Augpunkt $\mathbf{A}(5; 1; 3)$ zentral in die 1-3-Ebene projiziert. Ermitteln Sie die Bildmatrix und stellen Sie die Projektion grafisch dar (verdeckte Kanten bitte stricheln).

- c) Ermitteln Sie (rechnerisch) die Fluchtpunkte, die für diese Projektion relevant sind und vergleichen Sie mit Ihrer Zeichnung.

Z5

- a) Vom Augpunkt $\vec{a}$ aus soll ein beliebiger Punkt $\vec{p}$ des Raumes in die Ebene $\mathcal{E} : \vec{n} \bullet \vec{r} = d$ projiziert werden (Zentralprojektion). Zeigen Sie, dass der Bildpunkt gegeben wird durch:

$$\vec{p}' = \vec{a} + \frac{d - \vec{n} \bullet \vec{a}}{\vec{n} \bullet (\vec{p} - \vec{a})} \cdot (\vec{p} - \vec{a})$$

[Tipp: Wählen Sie den Augpunkt als Aufpunkt!]

Ab jetzt soll es sich speziell um eine Zentralprojektion von einem Augpunkt auf der x_2 -Achse in die x_1 - x_3 -Ebene handeln.

- b) Was kann man nun über $\vec{a}$, $\vec{n}$ und d aussagen?

- c) Zeigen Sie, dass in diesem Spezialfall der Bildpunkt gegeben wird durch: $\vec{p}' = \frac{a_2}{a_2 - p_2} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix}$

Ein Würfel der Kantenlänge **2** besitzt folgende Objektmatrix:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- d_1) Der Würfel soll (zentral) vom Augpunkt A(0; 6; 0) in die x_1 - x_3 -Ebene projiziert werden. Ermitteln Sie die Bildmatrix und zeichnen Sie das in der x_1 - x_3 -Ebene erhaltene Bild, (verdeckte Kanten bitte stricheln).
(Nur die Bildebene zeichnen, keine 3D-Darstellung der Situation!)
- d_2) Ermitteln Sie (rechnerisch) den Fluchtpunkt von Parallelen zur x_2 -Achse.
- e) Betrachten Sie in der Formel aus Teilaufgabe c den Grenzfall, dass der Augpunkt sich (auf der x_2 -Achse) von der Projektionsebene beliebig weit entfernt. Um was für eine Art von Projektion handelt es sich nun? Wie lautet die Gleichung?

Literatur

- [AT82] Artmann, Benno und Törner, Günter, Lineare Algebra, Grund- und Leistungskurs, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1982
- [AT84] Artmann, Benno und Törner, Günter, Lineare Algebra und Geometrie, 2. Auflage, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1984
- [BW94] Bock, H. und Walsch, W. (Hrsg.): „Mathematik - Analytische Geometrie und Lineare Algebra“; Oldenbourg Verlag; München 1994
- [FUC83] Fuchs, Siegfried. E., Die Perspektive, Verlag Aurel Bongers, Recklinghausen 1983
- [FUH87] Hoschek, Josef, Grundlagen der Geometrischen Datenverarbeitung, Kurseinheit 1, Transformationen räumlicher Objekte, Fernuniversität Hagen 1987
- [FUH89] Strasser, W., Graphische Datenverarbeitung, Kurseinheit 2: Dreidimensionale Darstellungen, Fernuniversität Hagen 1989
- [GRA61] Graf, Ulrich, Darstellende Geometrie, Quelle & Meyer, Heidelberg 1961
- [HKM91] Hessisches Kultusministerium: „Kursstrukturpläne, Gymnasiale Oberstufe“; Aufgabenfeld III, Mathematik; Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt 1991
- [KHK74] Köhler, J., Höwelmann, R. und Krämer, H.: „Analytische Geometrie in vektorieller Darstellung“; 9. Auflage; Diesterweg/Salle; Frankfurt a.M. 1974
- [KL93] Kuypers, W. und Lauter, Prof. J. (Hrsg.): „Mathematik Sekundarstufe II - Analytische Geometrie und Lineare Algebra“; Cornelsen Verlag; Berlin 1993
- [KOE92] Köck, P.: „Praktische Schulpädagogik“; Ludwig Auer GmbH; Donauwörth 1992
- [KTH83] Rixecker, Helmut und Rösler, Dr. Gunther (Bearb.), Themenhefte Mathematik: Darstellende Geometrie, Klett, Stuttgart 1983
dazu Lösungsheft
- [MEY89] Meyer, H.: „Unterrichtsmethoden, II: Praxisband“; Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG; Berlin 1987
- [ML97] Themenheft „Zum genetischen Unterricht“ der Zeitschrift „mathematik lehren“, Heft 83, Friedrich Verlag, Seelze 8/1997
- [SCH70] Schweizer, W. (Hrsg.): „Geometrie 2“; 1. Auflage; Ernst Klett Verlag; Stuttgart 1970
- [SEE97] Seebach, Günter: „Perspektive im Geometrieunterricht“:
<http://www.learn-line.nrw.de/angebote/geometrie/imfoyer/seebach.htm>
- [WIT81] Wittmann, E. Ch., Grundfragen des Mathematikunterrichts, Vieweg Verlag, Braunschweig 1981
(6)